

Test des Standardmodells im B -Mesonen-Sektor durch Mischungsphänomene und seltene Zerfälle

Dissertation
zur Erlangung des
Doktorgrades der Naturwissenschaften
(Doctor rerum naturalium)

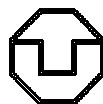
vorgelegt von

Jörg Urban

geboren am 14. August 1970 in Radebeul

Institut für Theoretische Physik
Fachrichtung Physik
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Dresden

1999



Eingereicht am: 07. Juni 1999

1. Gutachter: Prof. Dr. G. Soff (TU Dresden)
2. Gutachter: Prof. Dr. K. W. Becker (TU Dresden)
3. Gutachter: Prof. Dr. A. J. Buras (TU München)

Verteidigt am:

Kurzfassung

In dieser Arbeit werden die seltenen Zerfälle $b \rightarrow s \gamma$ und $b \rightarrow s g$, sowie die $B\bar{B}$ -Oszillation einschließlich QCD-Korrekturen in Next-to-Leading-Log-Approximation untersucht. Es handelt sich hierbei um Flavor Changing Neutral Current (FCNC) Prozesse, welche auf dem Born-Niveau innerhalb des Standardmodells verboten sind. Diese Prozesse sind besonders geeignet zum Testen des Standardmodells, da mögliche Erweiterungen potentiell denselben Beitrag liefern können. Als Erweiterungen werden das 2-Higgs-Dublett-Modell, Links-Rechts-Modelle und insbesondere das Minimale Supersymmetrische Standardmodell diskutiert.

Am Beispiel der $B\bar{B}$ -Oszillation wird gezeigt, daß die Bestimmung der Wilson-Koeffizienten unabhängig von der Behandlung der leichten Felder ist. Dazu wird zum einen die dimensionale Regularisierung der IR-Divergenzen und zum anderen die Einführung von IR-Regulatoren benutzt.

Für das $B\bar{B}$ -Mixing werden mit Hilfe der sehr genau gemessenen Massenaufspaltung Δm_B Aussagen zu $(V_{td} V_{tb}^*)^2$ getroffen.

Weiterhin wird das Verzweigungsverhältnis $BR[B \rightarrow X_s \gamma]$ im Standardmodell und im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell bestimmt.

Abstract

Calculations for the rare decays $b \rightarrow s \gamma$ and $b \rightarrow s g$, as well as the $B\bar{B}$ -mixing inclusive QCD-corrections in Next-to-Leading-Log-Approximation are presented throughout this work. The decays and the mixing are caused by Flavor Changing Neutral Current (FCNC) processes, which are absent on the tree-level within the framework of the Standard-Model. Hence these processes are qualified to test the validity of the Standard-Model, because possible extensions may provide similar contributions. Considered extensions are the 2-Higgs-Doublet-Model, Left-Right-Models and the Minimal Supersymmetric Standard-Model.

It is shown that the determination of the Wilson-coefficients is independent of the treatment of the light fields for the case of the $B\bar{B}$ -mixing. For this proof the dimensional regularisation of the IR-divergences on one side and a regulator mass for the light fields on the other side is utilized.

The well-known value for the mass splitting Δm_B available from the $B\bar{B}$ -oscillation is applied to deduce $(V_{td} V_{tb}^*)^2$.

Furthermore the branching ratio $BR[B \rightarrow X_s \gamma]$ is calculated within the Standard-Model and the Supersymmetric Standard-Model.

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation und Einführung	7
2	Theoretische Grundlagen	10
2.1	Das elektroschwache Standardmodell	10
2.1.1	Eine Einführung in das elektroschwache Standardmodell	10
2.1.2	Die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Mischungsmatrix	17
2.1.3	Die CP-Verletzung	21
2.2	Die Quantenchromodynamik	23
2.3	Erweiterung des Standardmodells	29
2.3.1	Das 2-Higgs-Dublett-Modell	30
2.3.2	Links-Rechts-Modelle	31
2.3.3	Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell	34
2.4	Die Renormierung	44
2.4.1	Eine kurze Einführung in die Renormierung	45
2.4.2	Die Renormierung der QCD	48
2.4.3	Die Renormierungsgruppe	49
2.4.4	Probleme mit der Matrix γ_5 in D Dimensionen	51
2.5	Effektive Theorien	53
2.5.1	Die Operatorproduktentwicklung	53
2.5.2	Renormierungsgruppengleichung für die Wilson-Koeffizienten	61
2.5.3	Next-to-Leading-Order-Approximation	64
3	Das $B\bar{B}$-Mixing in Next-to-Leading-Order Approximation	66
3.1	Allgemeine Bemerkungen	66
3.2	Die expliziten QCD-Korrekturen	67
3.3	Das Matching und Skalieren zur hadronischen Skala	70
3.4	Dimensionale Regularisierung der IR-Divergenzen	73
3.5	Resultate	76
3.6	Schlußfolgerungen	80
3.7	Das $B\bar{B}$ -Mixing im MSSM	80
4	Der Zerfall $B \rightarrow X_s \gamma$ in Next-to-Leading-Order Approximation	85
4.1	Einführung	85
4.2	Generische Gleichungen	88
4.2.1	Diagramme mit schweren skalaren Teilchen und schweren Fermionen . . .	88
4.2.2	Diagramme mit schweren Vektor-Bosonen und schweren Fermionen . . .	92
4.2.3	Diagramme mit schweren Vektor-Bosonen und leichten Fermionen . . .	94
4.3	Substitutionen	96
4.4	Resultate	106
4.5	Schlußfolgerungen	114

5 Zusammenfassung	115
A Bezeichnungen und Konventionen	117
B Feynman-Regeln	118
B.1 Das Standardmodell	118
B.2 Das 2-Higgs-Dublett-Modell	119
B.3 Links-Rechts-Modelle	120
B.4 Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell	121
C Dirac-Algebra	123
D Farb-Algebra	125
E Integrale	127
E.1 Reduktion der tensoriellen Integrale zu skalaren Integralen	128
E.2 Vereinfachung des Zählers und Nenners	130
E.3 Lösung der skalaren Integrale	131
E.4 Rekurrens-Relationen	134
F Das $B\bar{B}$-Mixing	137
F.1 Feynman-Diagramme zum $B\bar{B}$ -Mixing	137
F.2 Analytische NLO-Resultate für das $B\bar{B}$ -Mixing	139
G Der seltene Zerfall $B \rightarrow X_s \gamma$	144
G.1 Die Operatorbasis	144
G.2 Feynman-Diagramme für die Zerfälle $b \rightarrow s \gamma, b \rightarrow s g$	145
G.3 Funktionen für die generischen Gleichungen	147
G.4 Nicht-gluonische Beiträge im MSSM	151
H Numerischer Input	154
Danksagung	156
Literatur	157
Erklärung	163

Galilei: Um mit einiger Zuversicht die Rotation der Sonne zu beweisen. Meine Absicht ist nicht, zu beweisen, daß ich bisher recht gehabt habe, sondern: herauszufinden, ob. Ich sage: laßt alle Hoffnung fahren, die ihr in die Beobachtung eintretet. Vielleicht sind es Dünste, vielleicht sind es Flecken, aber bevor wir Flecken annehmen, welche uns gelegen kämen, wollen wir lieber annehmen, daß es Fischeschwänze sind. Ja, wir werden alles, noch einmal in Frage stellen. Und wir werden nicht mit Siebenmeilenstiefeln vorwärts gehen, sondern im Schneckentempo. Und was wir heute finden, werden wir morgen von der Tafel streichen und erst wieder anschreiben, wenn wir es noch einmal gefunden haben. Und was wir zu finden wünschen, das werden wir, gefunden, mit besonderen Mißtrauen ansehen. Also werden wir an die Beobachtung der Sonne herangehen mit dem unerbittlichen Entschluß, den Stillstand der Erde nachzuweisen! Und erst wenn wir gescheitert sind, vollständig und hoffnungslos geschlagen und unsere Wunden leckend, in traurigster Verfassung, werden wir zu fragen anfangen, ob wir nicht doch rechtgehabt haben und die Erde sich dreht! -*Mit einem Zwinkern:* Sollte uns aber dann jede andere Annahme als diese unter den Händen zerronnen sein, dann keine Gnade mehr mit denen, die nicht geforscht haben und doch reden. Nehmt das Tuch vom Rohr und richtet es auf die Sonne!

Bertolt Brecht: Leben des Galilei

1 Motivation und Einführung

Das Standardmodell (SM) der Elementarteilchen-Physik wird heute sehr erfolgreich durch die elektroschwache Wechselwirkung ($U(1)_Y \times SU(2)_I$) und die Quantenchromodynamik (QCD, $SU(3)_C$) beschrieben. Die QCD läßt sich im perturbativen Bereich gut beschreiben, jedoch beinhaltet der sich aus dem Confinement ergebende nicht-perturbative Bereich ($\mu \leq \Lambda_{\text{QCD}}$) eine große Anzahl ungelöster Probleme. Diese versucht man, durch verschiedene Ansätze, z. B. Heavy Quark Effective Theory (HQET), Gitter-Eichtheorien, $1/N$ -Entwicklung und hadronische Summenregeln zu lösen. Jedoch muß gegenwärtig festgehalten werden, daß es im wesentlichen noch keine befriedigenden Lösungen gibt. Es wird im weiteren auf diese Problematik nicht eingegangen.

Die elektroschwache Theorie ist von ihrer feldtheoretischen Struktur komplizierter als die QCD und beinhaltet viele offene Fragen, von denen einige innerhalb dieser Arbeit diskutiert werden sollen.

Eine sehr prominente Frage ist die der elektroschwachen Symmetriebrechung ($U(1)_Y \times SU(2)_I \rightarrow U(1)_Q$) und die Herkunft der Fermionenmassen. Ebenso interessant ist der Fakt, daß die diskreten Symmetrien **C**, **P**, **CP** und **T** bei der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten sind, jedoch alle durch die schwache Wechselwirkung verletzt werden. Man kann durchaus konstatieren, daß der elektroschwache Sektor derjenige ist, der am wenigsten verstanden ist. Die Geschichte dieses Feldes brachte bisher und wird in Zukunft noch viele Überraschungen bringen.

Dies ist der Grund, warum überaus große Anstrengungen auf diesem Gebiet unternommen werden. Hierbei ist vor allem die BABAR-Kollaboration [1] am SLAC und die Belle-Kollaboration [2] am KEK in Japan zu nennen. Beide Experimente haben die genaue Bestimmung der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix), insbesondere der Elemente, welche mit den schweren Flavors zusammenhängen, zum Ziel. Somit werden sie eine Schlüsselrolle bei der Untersuchung der CP-Verletzung im B -Mesonen-Sektor spielen. LEP2 [3] und LHC [4] werden u. a. der Frage der elektroschwachen Symmetriebrechung und somit der Suche nach dem Higgs-Teilchen nachgehen.

Entsprechend den gegenwärtigen Planungen für diese Experimente kann davon ausgegangen werden, daß ca. 2005 bis 2010 die Frage nach der CKM-Beschreibung der CP-Verletzung weitgehend geklärt ist. Ebenso wird zu diesem Zeitpunkt das Higgs-Teilchen gefunden sein oder zumindestens die Masse (letzter unbekannter SM-Parameter) auf einen unwahrscheinlichen Bereich eingeschränkt sein, so daß nach einem anderen Massengenerierungsmechanismus gesucht werden muß. Weiterhin werden aufgrund der oben aufgeführten Hochpräzisions-Experimente die Fehler der SM-Parameter so eingeschränkt sein, daß genauere Aussagen zur Physik hinter dem SM, wie z. B. Modelle mit erweitertem Higgs-Sektor oder Supersymmetrie, gemacht werden können.

Insbesondere die Frage nach Erweiterungen des SM erfordert nicht nur ein starkes experimentelles Engagement, sondern auch die Verbesserung der theoretischen Vorhersagen (höhere Ordnung der Störungstheorie), um genauere Grenzwerte für „Neue Physik“ geben zu können. Dazu ist es u. a. für diese Arbeit wichtig, das Wechselspiel zwischen QCD und elektroschwa-

chem Sektor zu analysieren, denn sobald elektroschwache Zerfälle von B -Mesonen untersucht werden, wird die QCD eine nicht unwesentliche Rolle spielen. Dazu muß man als quantenfeldtheoretisches Werkzeug die *Wilsonsche-Operatorprodukt-Entwicklung* (OPE) [5] und die *Renormierungsgruppen-Theorie* (RG) [6] anwenden. Diese Hilfsmittel gestatten es, die Übergangsamplitude \mathcal{A} in der folgenden Form zu schreiben:

$$\mathcal{A} = \langle H_{\text{eff}} \rangle = \sum_i C_i(\mu, M_W) \langle \hat{O}_i(\mu) \rangle \quad , \quad (1)$$

wobei C_i die *Wilson-Koeffizienten* und \hat{O}_i die lokalen Operatoren darstellen. Innerhalb dieser Beschreibung werden schwere Felder „ausintegriert“ (effektive Theorie) und sind implizit in den Wilson-Koeffizienten enthalten. Die leichten Felder (dynamische Freiheitsgrade der effektiven Theorie), d. h. die langreichweitigen Anteile des Prozesses, sind im Matrixelement der lokalen Operatoren $\langle \hat{O}_i(\mu) \rangle$ enthalten. In der Regel werden nur Operatoren niedrigster Dimension benötigt. Alle anderen sind mit p^2/M_W^2 unterdrückt, wobei p die für den Prozeß relevante Skala repräsentiert und M_W stellvertretend für die schweren Massen steht.

Die OPE (1) hat somit unseren Prozeß in zwei separate Bestandteile zerlegt, den langreichweitigen (Matrixelemente der Operatoren) und den kurzreichweitigen Anteil (Wilson-Koeffizienten). Der Parameter μ stellt dabei die Separationsskala dar und ist hier $\mu \approx \mathcal{O}(M_W)$. Es ist natürlich willkürlich, welches konkrete μ gewählt wird und somit welcher Teil als kurzreichweitiger und welcher als langreichweitiger Anteil behandelt wird. Über diese Freiheit muß noch ausführlich diskutiert werden. Die Amplitude \mathcal{A} ist als physikalische Größe jedoch unabhängig von μ .

Wie bereits erwähnt, für den langreichweitigen Anteil gibt es verschiedene Ansätze (z. B. Gitter-Eichtheorien). Diese Problemstellung ist jedoch noch nicht befriedigend geklärt und somit innerhalb der hier gemachten Rechnung mit dem größten Fehler behaftet.

Im Gegensatz dazu können die kurzreichweitigen Anteile in einer systematischen Weise analytisch untersucht werden. Das Hilfsmittel hierfür ist die Störungstheorie, die dank der asymptotischen Freiheit benutzt werden kann.

Das Auftreten von großen Logarithmen $\ln(\mu^2/M_W^2)$ erfordert ein weiteres bereits erwähntes Hilfsmittel, die RG-Analyse. Durch das Auftreten von sehr verschiedenen Skalen (Separationsskala $\mu \approx M_W$, hadronische Skala $\mu \approx m_B$) ist man gezwungen, die naive Störungstheorie durch die *renormierungsgruppen-verbesserte Störungstheorie* zu ersetzen.

Dies führt dann zu einer Aufsummation von Termen $\sim (\alpha_s \ln(\mu^2/M_W^2))^n$ in Leading Order (LO) und zusätzlich $\sim \alpha_s (\alpha_s \ln(\mu^2/M_W^2))^n$ in Next-to-Leading Order (NLO) zu allen Ordnungen der Störungstheorie. Hierbei repräsentiert μ in diesem Fall die hadronische Skala.

Das Ziel dieser Arbeit soll eine NLO-Analyse des $B\bar{B}$ -Mixings und des Prozesses $B \rightarrow X_s \gamma$ sein, wobei nur auf den störungstheoretischen Anteil fokussiert werden soll. Der langreichweitige Anteil kann vollkommen unabhängig bestimmt werden und wird hoffentlich eines Tages mit der gewünschten Genauigkeit bekannt sein.

Mit Hilfe der OPE und der RG kann die Amplitude immer in der folgenden Form geschrieben werden [10]:

$$\mathcal{A} \sim \sum_i B_i \eta_{\text{QCD}} F_i(M_W) \quad , \quad (2)$$

hierbei stellen die B_i nichtstörungstheoretische Faktoren dar, die sich aus den hadronischen Matrixelementen der lokalen Operatoren ergeben. Die Größe η_{QCD} beinhaltet die kurzreichweitigen QCD-Korrekturen, die sich aus der RG-Analyse ergeben. Die Funktionen F_i werden aus den n -Schleifen Diagrammen bestimmt und hängen nur von den Massen der schweren Teilchen (repräsentiert durch M_W) ab.

NLO-Rechnungen beinhalten sehr involvierte Berechnungen von Zweischleifen-Diagrammen. Die erste NLO-Arbeit wurde 1981 von Altarelli et al. [7] für die Theorie der schwachen Zerfälle präsentiert. Seitdem sind ungeheure Anstrengungen auf diesem Gebiet zu verzeichnen (siehe u. a. in [8, 9]), die sich alle zum Ziel gesetzt haben, die theoretischen Fehler zu reduzieren, um künftigen Experimenten gerecht zu werden.

Im weiteren sollen einige Gründe kurz erwähnt werden, warum es sinnvoll ist, komplizierte NLO-Rechnungen durchzuführen:

- Test der Störungstheorie,
- Reduktion der numerischen Unsicherheit, die sich aus der Willkür der Separationsskala ergibt,
- die Abhängigkeit der top-Quark Masse von μ ist eine NLO-Eigenschaft.

Über B -Mesonen-Physik existieren eine große Anzahl von Übersichtsartikeln. Zwei sehr pädagogische und ausführliche Beschreibungen findet man in [10]. Bei der Bereitstellung des theoretischen Rahmens wird sehr häufig auf diese Artikel zurückgegriffen.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß B -Mesonen-Physik ein exzellentes Laboratorium darstellt, um zum einen das SM zu überprüfen und somit zum anderen nach Erweiterungen des SM zu suchen. Alle Prozesse, die hier diskutiert werden, können unter dem Begriff Flavor Changing Neutral Currents (FCNC) zusammengefaßt werden. FCNC-Prozesse sind im SM in Born-Approximation verboten. Somit sind diese Prozesse prinzipiell durch ihre innerhalb der Schleifen laufenden virtuellen Beiträge sensitiv auf „Neue Physik“. Insbesondere B -Mesonen Zerfälle sind dafür sehr gut geeignet. In dieser Arbeit werden die folgenden Szenarien für Physik jenseits des SM von Interesse sein: die Supersymmetrie, das 2-Higgs-Dublett-Modell (2HDM) und Links-Rechts-Modelle. Gegenwärtig muß man sagen, daß experimentelle Resultate innerhalb der Fehlergrenzen konsistent mit dem SM sind und somit zu einer drastischen Einschränkung der Parameter-Grenzen für die neuen Modelle führen. So sind z. B. die experimentellen Resultate für den Zerfall $B \rightarrow X_s \gamma$ von CLEO [11]:

$$BR[B \rightarrow X_s \gamma] = (3.15 \pm 0.35_{\text{stat}} \pm 0.32_{\text{syst}} \pm 0.26_{\text{model}}) \times 10^{-4} \quad (3)$$

und ALEPH [12]:

$$BR[B \rightarrow X_s \gamma] = (3.11 \pm 0.80_{\text{stat}} \pm 0.72_{\text{syst}}) \times 10^{-4} \quad (4)$$

konsistent mit den theoretischen SM Erwartungen:

$$BR[B \rightarrow X_s \gamma] = (3.3 \pm 0.3_{\text{theor}}) \times 10^{-4} \quad . \quad (5)$$

Dieses Resultat ergibt sich aus NLO-Rechnungen [13] – [16]. Alle Autoren sind sich einig, daß der theoretische Fehler ca. 10% beträgt [14] – [20].

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen bereitgestellt, die zum einen für die weiteren Rechnungen notwendig sind und zum anderen diese Arbeit lesbarer machen sollen.

Das Standardmodell (SM) der Elementarteilchenphysik basiert auf dem elektroschwachen SM und der Quantenchromodynamik (QCD). Beide Theorien werden vorgestellt, selbstverständlich ist es unmöglich, alle Facetten zu beleuchten. Der Fokus ist vor allem auf die CKM-Matrix und die CP-Verletzung gerichtet. Desweiteren werden auch sehr technische Fragestellungen betrachtet, wie z. B. die Renormierung. Der Begriff der Operatorproduktentwicklung (OPE) und die Renormierungsgruppe (RG) werden vorgestellt. Im Lichte der in naher Zukunft stattfindenden Experimente (BABAR-Kollaboration, Belle-Kollaboration u. a.) sind ebenso Fragestellungen nach „Neuer Physik“ aufzuwerfen. Deshalb wird das 2-Higgs-Dublett-Modell (2HDM), das Links-Rechts-Modell und das Minimale Supersymmetrische SM (MSSM) beschrieben.

2.1 Das elektroschwache Standardmodell

Die Geburtsstunde des elektroschwachen Standardmodells bzw. des Glashow-Salam-Weinberg-Modells (GSW-Modell) kann auf die Jahre 1967/68 datiert werden. Es ist die erste erfolgreiche Vereinigung zweier fundamentaler Wechselwirkungen, der schwachen und der elektromagnetischen, im Rahmen einer Quantenfeldtheorie. Die Hauptidee dieses Modells steckt in der spontanen Symmetriebrechung $U(1)_Y \times SU(2)_I \longrightarrow U(1)_Q$. Im Jahr 1971 gelang 't Hooft der Renormierungsbeweis [21] und dies verhalf der Theorie zum endgültigen Durchbruch.

2.1.1 Eine Einführung in das elektroschwache Standardmodell

Der Startpunkt für die „Herleitung“ ist die folgende sehr einfache Lagrange-Funktion [22, 23]:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi} \not{\partial} \Psi = i(\bar{\Psi}_R \not{\partial} \Psi_R + \bar{\Psi}_L \not{\partial} \Psi_L) \quad , \quad (6)$$

wobei hier vorerst nur der leptonische Sektor der ersten Familie bzw. Generation¹ von Fermionen betrachtet wird. Ebenso werden die neueren Erkenntnisse hinsichtlich von Neutrino-Massen [24] ignoriert. Der aufmerksame Leser wird feststellen, daß beide Verallgemeinerungen ohne prinzipielle Abänderungen durchführbar sind.

Die linkshändigen Fermionen kommen in Dubletts mit dem schwachen Isospin $I_W = 1/2$ vor, wohingegen die rechtshändigen Fermionen in Singletts mit $I_W = 0$ auftreten:

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \quad , \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} e_R \end{pmatrix} \quad .$$

¹Die Begriffe Familie und Generation werden simultan benutzt. Die erste Familie im SM besteht aus dem Elektron, dem Elektron-Neutrino, dem up- und down-Quark.

Diese chirale Eigenschaft der Theorie erfordert, daß alle Fermionen die Masse Null besitzen, denn ein Massenterm $\bar{\Psi}\Psi = \bar{\Psi}_L\Psi_R + \bar{\Psi}_R\Psi_L$ ist nicht mehr invariant unter den noch zu fordernden Eichsymmetrie-Transformationen.

Es ist unschwer zu erkennen, daß die obige Lagrange-Funktion invariant unter einer $SU(2)_I$ -Transformation ist, wobei sich die rechtshändigen Fermionen entsprechend der trivialen Darstellung transformieren müssen (schwache Ladung $I_W = 0$). Eine irreduzible Darstellung hat die folgende Form:

$$SU(2)_I : \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{-i/2 \tau \cdot \alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} , \quad (7)$$

mit den Pauli-Matrizen τ_i als 2-dimensionale Darstellung der $SU(2)$ -Generatoren. Die reellen Zahlen α_i parametrisieren die Transformation. Desweiteren ist \mathcal{L} invariant unter der $U(1)_Y$ -Transformation, mit z. B. der folgenden Darstellung:

$$U(1)_Y : \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{in\beta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{in\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} . \quad (8)$$

Die Variable n ist eine Zahl, welche nicht notwendigerweise identisch Eins ist und noch festgelegt werden muß. Sie parametrisiert das unterschiedliche Transformationsverhalten der Singletts und Dubletts. Die reelle Zahl β ist der Transformationsparameter. Die mit der $U(1)_Y$ -Symmetrie zusammenhängende Ladung wird entsprechend dem Vorschlag Weinbergs folgend *schwache Hyperladung* Y_W genannt.

Die aus gruppentheoretischen Überlegungen folgende *quasi-Gell-Mann-Nishijima-Relation* stellt eine Verbindung der erhaltenen Quantenzahlen I_W^3 , Y_W vor der Symmetriebrechung mit der Quantenzahl Q (elektrische Ladung: erhaltene Ladung nach der Symmetriebrechung) her:

$$I_W^3 + \frac{Y_W}{2} = Q . \quad (9)$$

Der Faktor $1/2$ vor Y_W ist reine Konventionssache. Die letzte Gleichung erlaubt es nun, die schwache Hyperladung für die Fermionen zu berechnen. Es gilt $(\nu_e, e_L) : Y_W = -1$ und $(e_R) : Y_W = -2$. Mit anderen Worten, die linkshändigen Leptonen koppeln mit der halben Stärke, verglichen mit den rechtshändigen. Diese Aussage fixiert unsere bislang unbekannte Zahl n auf $n = 1/2$.

Die nun folgenden Ausführungen ergeben sich ganz zwangsläufig aus der Forderung, daß die Theorie lokal eichinvariant sein muß. Die $SU(2)_I$ -Invarianz erfordert die Einführung von 3 Eichfeldern W_μ^i ($i = 1 \dots 3$), da die Lie-Algebra der $SU(2)$ 3 Generatoren besitzt, die entsprechend unseren Quantenzahlen nur an die linkshändigen Felder koppeln. Das $U(1)_Y$ -Eichboson wird mit X_μ bezeichnet. Somit ergibt sich die folgende unter $U(1)_Y \times SU(2)_I$ lokal eichinvariante Lagrange-Dichte, die mit \mathcal{L}_1 bezeichnet werden soll:

$$\mathcal{L}_1 = i\bar{\Psi}_R \gamma^\mu (\partial_\mu + ig' X_\mu) \Psi_R + i\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g' X_\mu - \frac{i}{2} g \tau \cdot \mathbf{W}_\mu \right) \Psi_L \quad . \quad (10)$$

Die kinetischen Terme der Eichbosonen haben die Gestalt:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \quad , \quad (11)$$

mit den folgenden Ausdrücken für die Feldstärke-Tensoren: $F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g \varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k$ und $G_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu$. Die Eichbosonen müssen zur Wahrung der lokalen Eichinvarianz masselos sein.

Eine Methode zur Erzeugung von Massentermen für die Eichbosonen und ebenso für die Fermionen ohne Zerstörung der Renormierbarkeit der Theorie ist die *spontane Symmetriebrechung* und der *Higgs-Mechanismus*. Es gibt für diese Mechanismen noch keinen direkten experimentellen Beweis, denn das Higgs-Boson ist das einzige noch nicht gefundene Teilchen im SM. Im weiteren soll kurz auf beide Mechanismen eingegangen werden.

Das SM basiert auf einem minimalen Higgs-Sektor, d. h. man führt ein Higgs-Dublett der Gestalt:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi_3 + i\Phi_4 \\ \Phi_1 + i\Phi_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

ein. Dieses Higgs-Dublett besitzt die folgenden Quantenzahlen: $I_W = 1/2$, $Y_W = 1$. Die letzte Quantenzahl ist auf den ersten Blick willkürlich. Eine andere Hyperladung wäre prinzipiell möglich, diese daraus resultierende Theorie würde aber nicht unsere beobachtbare Welt beschreiben. Die Lagrange-Dichte des Higgs-Teilchens in einer lokal eichinvarianten Form besitzt die folgende Struktur:

$$\mathcal{L}_3 = (D_\nu \Phi)^\dagger (D^\nu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad , \quad (13)$$

mit der aus der Festlegung der Quantenzahlen folgenden kovarianten Ableitung:

$$D_\mu = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g' X_\mu - \frac{i}{2} g \tau \cdot \mathbf{W}_\mu \right) \quad . \quad (14)$$

Man bestimmt nun das Minimum des Higgs-Potentials für $\mu^2 < 0$. Es existiert eine überabzählbar unendliche Anzahl von Grundzuständen (notwendige Forderung für die spontane Symmetriebrechung), welche alle durch eine $SU(2)_I \times U(1)_Y$ -Transformation ineinander überführt werden können. Die Wahl eines beliebigen dieser äquivalenten Grundzustände entspricht der spontanen Symmetriebrechung. Um in der üblichen Art und Weise Quantenfeldtheorie betreiben zu können (Vakuumerwartungswert sollte Null sein), wird das Higgs-Feld um seinen Vakuumerwartungswert (VEV) verschoben. Das neue Feld besitzt dann einen verschwindenden

VEV. Diese Verschiebungsprozedur nennt man Higgs-Mechanismus. Eine geschickte Wahl des Grundzustandes führt nach der Verschiebung auf folgenden Ausdruck:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma(x) \end{pmatrix} , \quad (15)$$

wobei η der VEV des Higgs-Feldes vor der Symmetriebrechung ist. Somit muß das reelle Feld σ einen verschwindenden VEV haben. Um den letzteren Ausdruck zu erhalten, muß man sich klar machen, daß jeder Vakuumzustand gleichberechtigt ist und daß man letztlich 3 Freiheitsgrade besitzt, um drei der vier Felder Φ_i in Gleichung (12) zu eliminieren. Die spezielle Wahl in Gleichung (15) bezeichnet man als *unitäre Eichung*.

Die Substitution $\Phi \rightarrow \sigma$ entspricht einfachen algebraischen Umformungen [22], welche zwangsläufig auf Massenterme führen. In einem Zwischenschritt ersetzt man W_μ^3 und X_μ durch ihre Masseneigenzustände Z_μ und A_μ wie folgt:

$$Z_\mu = \frac{g W_\mu^3 - g' X_\mu}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} = \cos \Theta_W W_\mu^3 - \sin \Theta_W X_\mu , \quad (16)$$

$$A_\mu = \frac{g' W_\mu^3 + g X_\mu}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} = \sin \Theta_W W_\mu^3 + \cos \Theta_W X_\mu . \quad (17)$$

Es handelt sich hierbei um eine orthogonale Transformation.

Summa summarum wird man nach dem Higgs-Mechanismus und der Diagonalisierung der Massenmatrizen auf eine Lagrange-Funktion mit folgenden Eigenschaften geführt:

- W_μ^1 und W_μ^2 bekommen dieselbe Masse $g^2\eta^2/4 = M_W^2$,
- Z_μ erhält die Masse $M_W^2 / \cos^2 \Theta_W$,
- A_μ bleibt masselos,
- das Neutrino ν_e koppelt nur an Z_μ und W_μ ,
- e_L und e_R koppeln gleich stark an das Feld A_μ ,
- aus den vier Freiheitsgraden des komplexen Dubletts Φ in Gleichung (12) entsteht ein neutrales physikalisches Higgs-Boson.

Es ist jetzt zulässig, das Feld A_μ als Photon und Z_μ als Z-Boson zu interpretieren. Die geladenen W-Bosonen ergeben sich wie folgt:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \pm i W_\mu^2) . \quad (18)$$

Bis jetzt fehlt noch der entscheidende Teil der Massenerzeugung der Fermionen, welcher auf die CKM-Matrix führen wird. Die Fermionen bekommen ihre Masse durch die Ankopplung an das Higgs-Boson $\sigma(x)$ (Yukawa-Kopplungen). In der Ein-Familien-Näherung sieht die dazugehörige Lagrange-Funktion nun unter Berücksichtigung des Quark-Sektors wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 &= f^{(e)} \bar{l}_L \Phi e_R + f^{(u)} \bar{q}_L \tilde{\Phi} u_R + f^{(d)} \bar{q}_L \Phi d_R \\ &= \frac{\eta}{\sqrt{2}} [f^{(e)} \bar{e}_L e_R + f^{(u)} \bar{u}_L u_R + f^{(d)} \bar{d}_L d_R] + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} [f^{(e)} \bar{e}_L e_R + \dots] \quad ,\end{aligned}\quad (19)$$

wobei erneut die unitäre Eichung benutzt wurde. Der erste Summand in der letzten Zeile entspricht einem Massenterm, wohingegen der letzte nur angedeutete Summand die Wechselwirkung der Fermionen mit dem Higgs-Boson $\sigma(x)$ beschreibt. Die Variablen $f^{(i)}$ sind beliebige Zahlen. Desweiteren wurden die folgenden Abkürzungen benutzt:

$$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad , \quad l_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{\Phi} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Phi^* \quad ,$$

wobei $u_{L/R}$ das links- bzw. rechtshändige up-Quark beschreibt und $d_{L/R}$ repräsentiert das down-Quark. Die Struktur von \mathcal{L}_4 wird bestimmt von der Forderung nach $SU(2)_I \times U(1)_Y$ -Invarianz. Im 2-dimensionalen Isospin-Raum der $SU(2)_I$ lassen sich aus den Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$ die folgenden beiden Invarianten konstruieren:

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad , \quad i \mathbf{a}^T \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad .$$

Die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_4 ergibt sich nun unter der Annahme masseloser Neutrinos und der Forderung, daß die einzelnen Terme Skalare bezüglich des Isospins mit Hyperladung Null sind. Sobald die Familien-Replikation im SM berücksichtigt wird, ist man gezwungen, zwischen zwei Arten von fermionischen Zuständen zu unterscheiden: den Wechselwirkungseigenzuständen und den Masseneigenzuständen. Im weiteren werden die Wechselwirkungseigenzustände mit einem Strich versehen.

Die Lagrange-Funktion \mathcal{L}_4 verallgemeinert sich zu:

$$\mathcal{L}_4 = f_{AB}^{(e)} \bar{l}'_{AL} \Phi e'_{BR} + f_{AB}^{(u)} \bar{q}'_{AL} \tilde{\Phi} u'_{BR} + f_{AB}^{(d)} \bar{q}'_{AL} \Phi d'_{BR} \quad . \quad (20)$$

Die Indizes A und B sind Familien-Indizes und laufen von 1 bis 3. Damit ergibt sich für die Massenmatrix als Verallgemeinerung:

$$M_{AB}^{(i)} = -\frac{\eta}{\sqrt{2}} f_{AB}^{(i)} \quad . \quad (21)$$

Es gibt keinen physikalischen oder mathematischen Grund diese Massenmatrix diagonal anzunehmen, im allgemeinen ist diese Matrix nicht einmal symmetrisch oder hermitesch. Um die

Lagrange-Funktion mit Hilfe von Masseneigenzuständen schreiben zu können, muß diese Matrix diagonalisiert werden. Dies geht bei allgemeinen Matrizen durch eine sogenannte *biunitäre Transformation*, d. h., es existieren zwei unitäre Matrizen \mathbf{S} und \mathbf{T} derart, daß $\mathbf{S}^+ \mathbf{M} \mathbf{T} = \mathbf{M}_d$ diagonal ist. Ein sehr schöner Beweis befindet sich in [25].

Damit ergibt sich die Relation zwischen den Wechselwirkungseigenzuständen und den Masseneigenzuständen mit Hilfe von :

$$\bar{\Psi}'_L \mathbf{M} \Psi'_R = (\bar{\Psi}'_L \mathbf{S}) \mathbf{S}^+ \mathbf{M} \mathbf{T} (\mathbf{T}^+ \Psi'_R) = \bar{\Psi}_L \mathbf{M}_d \Psi_R \quad (22)$$

zu

$$\Psi'_R = \mathbf{T} \Psi_R \quad , \quad \bar{\Psi}'_L = \bar{\Psi}_L \mathbf{S}^+ \quad . \quad (23)$$

Im weiteren wird nur der Quark-Sektor untersucht. Man kann die folgenden globalen unitären Transformationen durchführen, unter denen \mathcal{L} invariant bleibt:

$$u'_{AR} = (V_u R)_{AB} u_{BR} \quad , \quad (24)$$

$$d'_{AR} = (V_d R)_{AB} d_{BR} \quad , \quad (25)$$

$$q'_{AL} = (V_L)_{AB} q_{BL} \quad . \quad (26)$$

Würde man das Dublett in (26) nicht als einheitliches Objekt transformieren, dann würde der entsprechende Term $\bar{q}'_{AL} i \not{D} q'_{AL}$ in der Lagrange-Funktion nicht invariant bleiben. Mit diesen Transformationen gehen die Massenmatrizen über in:

$$M_{AB}^{(u)} \rightarrow (V_L^+)_{CA} M_{AB}^{(u)} (V_u R)_{BD} = \text{per Konvention reell und diagonal} \quad , \quad (27)$$

$$M_{AB}^{(d)} \rightarrow (V_L^+)_{CA} M_{AB}^{(d)} (V_d R)_{BD} = \text{im allgemeinen nicht diagonal} \quad . \quad (28)$$

Da es nur drei unitäre Matrizen \mathbf{V} gibt, kann im allgemeinen nur eine Massenmatrix diagonalisiert werden. Man wählt aus Gründen der Konvention den up-type-Sektor aus. Um nun auch noch den down-type-Sektor zu diagonalisieren, muß eine weitere unabhängige unitäre Transformation durchgeführt werden. Dazu transformiert man die untere Komponente des Dubletts unabhängig, d. h.:

$$d'_{AL} = (\mathbf{V}_{CKM})_{AB} d_{BL} \quad .$$

Diese Transformation läßt wie bereits erwähnt die Lagrange-Funktion nicht mehr invariant. Betrachtet man z. B. einen Teil von $\bar{q}'_{AL} i \not{D} q'_{AL}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{g_2}{2} \bar{q}'_{AL} \gamma^\mu \tau \cdot \mathbf{W}_\mu q'_{AL} + \dots \\
&= \frac{g_2}{2} \bar{u}'_{AL} \gamma^\mu d'_{AL} W^+ + \dots \\
&= \frac{g_2}{2} \bar{u}_{AL} \gamma^\mu [\mathbf{V}_L^+ \mathbf{V}_L \mathbf{V}_{\mathbf{CKM}}]_{AB} d_{BL} W^+ + \dots \\
&= \frac{g_2}{2} (\mathbf{V}_{\mathbf{CKM}})_{AB} \bar{u}_{AL} \gamma^\mu d_{BL} W^+ + \dots \quad .
\end{aligned} \tag{29}$$

Wie bereits symbolisiert, ist die neue Matrix $\mathbf{V}_{\mathbf{CKM}}$ die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Mischungs-Matrix. Da es sich bei der CKM-Matrix per Definition um eine unitäre 3×3 -Matrix handelt, kann man sie mit 9 reellen Parametern beschreiben. Wieviele sind davon physikalisch? Einerseits muß festgestellt werden, daß Phasenfaktoren geladener Felder nicht beobachtbar sind und andererseits spielen in den geladenen Strömen der GSW-Theorie nur linkshändige Felder eine Rolle. Eine beliebige Phasentransformation der linkshändigen Quarkfelder verändert die CKM-Matrix wie folgt:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{CKM}} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\phi_u} & & \\ & e^{-i\phi_c} & \\ & & e^{-i\phi_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi_d} & & \\ & e^{i\phi_s} & \\ & & e^{i\phi_b} \end{pmatrix} , \tag{30}$$

bzw. für ihre Elemente gilt:

$$V_{u_A d_B} \rightarrow e^{-i(\phi_{u_A} - \phi_{d_B})} V_{u_A d_B} \quad . \tag{31}$$

Mit anderen Worten würden alle Felder mit derselben Phase transformiert, dann hätte dies keinen Einfluß auf die CKM-Matrix. Dies bedeutet aber, daß 5 Phasen wegtransformiert werden können und somit die CKM-Matrix statt 9 nur 4 beobachtbare Parameter besitzt. Natürlich muß bei der Phasentransformation der Quarkfelder sichergestellt sein, daß die gesamte Lagrange-Funktion invariant bleibt. Der neutrale Strom ist invariant, da er diagonal im Flavor-Raum (keine Flavor ändernden neutralen Ströme auf Born-Niveau) und diagonal in der Händigkeit ist. Der einzige nicht invariante Teil in \mathcal{L} ist der Yukawa-Term, da er links- und rechtshändige Felder verknüpft. Dies bedeutet aber nur, daß die rechtshändigen Felder in analoger Weise wie die linkshändigen transformiert werden müssen, um alles invariant zu lassen. Im leptonischen Sektor ist, solange man annimmt, daß die Massen der Neutrinos alle identisch Null bzw. entartet sind, eine CKM-Matrix nicht beobachtbar. Im Falle einer *beliebigen* unitären Transformation würden die Masseneigenzustände immer wieder auf sich selbst abgebildet werden, d. h. die Unterscheidung zwischen Massen- und Wechselwirkungseigenzuständen ist nicht notwendig:

$$\mathbf{U}^+ \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix} \mathbf{U} = \mathbf{U}^+ a \mathbf{1} \mathbf{U} = a \mathbf{U}^+ \mathbf{U} = \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix} \quad . \tag{32}$$

Bevor die CKM-Matrix und die CP-Verletzung ausführlich beschrieben werden, soll der fermionische Teilcheninhalt und die dazugehörigen Quantenzahlen zusammengefaßt werden:

$$q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L : \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L ,$$

$$l_L = \begin{pmatrix} n \\ e \end{pmatrix}_L : \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L ,$$

$$u_R : u_R, c_R, t_R ,$$

$$d'_R : d'_R, s'_R, b'_R ,$$

$$e_R : e_R, \mu_R, \tau_R .$$

	ν_L^e	e_L^-	e_R^-	u_L	u_R	d_L	d_R
Q	0	-1	-1	2/3	2/3	-1/3	-1/3
I_W^3	1/2	-1/2	0	1/2	0	-1/2	0
Y_W	-1	-1	-2	1/3	4/3	1/3	-2/3

Insgesamt besteht das elektroschwache SM aus 17 freien Parametern, den 4 Parametern der CKM-Matrix, den 9 Fermionenmassen, M_W , e , $\sin \Theta_W$ und m_{Higgs} , wobei für letzteren nur eine untere Grenze existiert.

2.1.2 Die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Mischungsmatrix

Es gibt verschiedene Parametrisierungen für die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Mischungsmatrix (CKM-Matrix). Die Standardparametrisierung [26] hat die folgende Gestalt:

$$\mathbf{V}_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix} ,$$

wobei die folgenden Abkürzungen benutzt wurden: $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ und $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$. Die phänomenologische Analyse der letzten Jahre ergibt die vier unabhängigen Parameter:

$s_{12} = |V_{us}|$, $s_{13} = |V_{ub}|$, $s_{23} = |V_{cb}|$, δ . Diese Parametrisierung sieht auf den ersten Blick sehr kompliziert aus, man kann sich jedoch überlegen, daß zur Parametrisierung der CKM-Matrix drei reelle Drehungen und eine komplexe Phase notwendig sind. Somit kann geschrieben werden:

$$\mathbf{V}_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (33)$$

was direkt zur Standardparametrisierung führt. Der Vorteil ist, daß die CP-verletzende Phase δ immer mit dem sehr kleinen s_{13} verknüpft ist. Die drei Winkel θ_{12} , θ_{13} und θ_{23} lassen sich auf einen Wertebereich $[0, \pi/2]$ einschränken, dann muß jedoch gelten: $0 < \delta < 2\pi$.

Eine weitere für die hier betrachteten Fälle besonders wichtige Parametrisierung ist die von Wolfenstein (1983) eingeführte [27, 28]. Hierbei handelt es sich um eine Entwicklung bezüglich des kleinen Parameters $\lambda \equiv |V_{us}| = 0.22$. Es gelten die folgenden Definitionen:

$$s_{12} = \lambda \quad , \quad s_{23} = A \lambda^2 \quad , \quad s_{13} e^{-i\delta} = A \lambda^3 (\rho - i\eta) \quad . \quad (34)$$

Die Wolfenstein-Parametrisierung hat damit die Gestalt:

$$\mathbf{V}_{\mathbf{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A \lambda^3 (\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A \lambda^2 \\ A \lambda^3 (1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) & -A \lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad , \quad (35)$$

mit $(\bar{\rho}, \bar{\eta}) \equiv (\rho, \eta) (1 - \lambda^2/2)$. Die vier unabhängigen Parameter sind in diesem Fall: λ, A, ρ, η . Der Vorteil dieser Form ist die Möglichkeit einer geometrischen Interpretation. Die Unitarität der CKM-Matrix impliziert mehrere Forderungen für die Matricelemente. Aus $\mathbf{V}^+ \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^+ = \mathbf{1}$ kann man die Relationen:

$$\sum_i V_{ij} V_{ik}^* = \sum_l V_{jl} V_{kl}^* = 0 \quad \text{für } j \neq k \quad (36)$$

ableiten, aus denen 6 Unitaritätsdreiecke in der komplexen Ebene folgen. Z. B. gilt die folgende Unitaritätsrelation:

$$V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = 0 \quad , \quad (37)$$

welche unter Ausnutzung der Wolfenstein-Parametrisierung umgeschrieben werden kann zu:

$$1 + \frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} = -\frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} \equiv \rho + i\eta + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad . \quad (38)$$

In der komplexen Zahlenebene können wir diese Relation in Form eines Dreiecks darstellen, welches wir seiner Herkunft wegen Unitaritätsdreieck nennen (Abbildung 1). Dieses Unitaritätsdreieck ist vom phänomenologischen Standpunkt das wichtigste, da es die Größen V_{ub} , V_{cb} und V_{td} , welche gegenwärtig unter extensiver Diskussion stehen, simultan enthält.

Entsprechend Gleichung (38) ergeben sich für die Seiten des Dreiecks die folgenden Beziehungen zu den CKM-Matricelementen:

$$\rho + i\eta = -\frac{V_{ud} V_{ub}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} \quad , \quad (39)$$

$$1 - \rho - i\eta = -\frac{V_{td} V_{tb}^*}{V_{cd} V_{cb}^*} \quad . \quad (40)$$

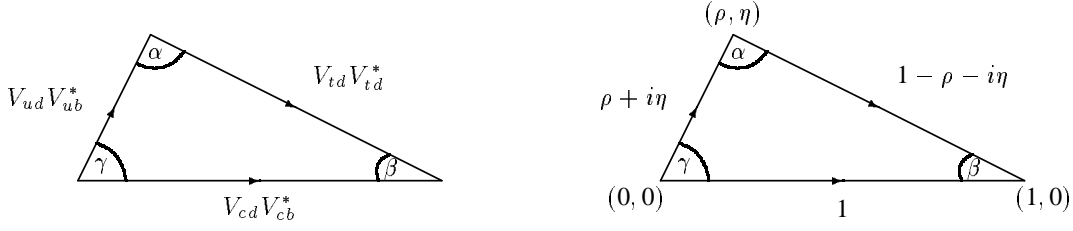


Abbildung 1: Das Unitaritätsdreieck in seiner nicht normierten (links) und normierten (rechts) Version.

Alle 6 Dreiecke haben exakt dieselbe Fläche A . Dies kann man wie folgt verifizieren: 2 beliebige komplexe Zahlen z_1 und z_2 bilden zwei Vektoren in der komplexen Ebene, die wiederum ein Dreieck mit der Fläche A_{12} formen. Es gilt:

$$|\operatorname{Im}(z_1^* z_2)| = |\operatorname{Im}[(x_1 - i y_1)(x_2 + i y_2)]| = |x_1 y_2 - x_2 y_1| = |\vec{z}_1 \times \vec{z}_2| = 2 A_{12} \quad .$$

Für die Flächen der Dreiecke soll entsprechend der Gleichung (36) das Symbol A_{jk} geschrieben werden. Es gibt somit die 6 Flächen A_{ds} , A_{db} , A_{sb} , A_{uc} , A_{ut} und A_{ct} . Die zur Unitaritätsrelation (37) gehörige Fläche lautet A_{db} . Die Größe dieser Fläche ergibt sich wie folgt:

$$A_{db} = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(V_{ud}^* V_{ub} V_{cd} V_{cb}^*)| = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(V_{ud}^* V_{ub} V_{td} V_{tb}^*)| = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(V_{cd}^* V_{cb} V_{td} V_{tb}^*)| \quad , \quad (41)$$

wobei der Term $1/2 |\operatorname{Im}(V_{ud}^* V_{ub} V_{cd} V_{cb}^*)|$ identisch zur Fläche A_{uc} ist: $1/2 |\operatorname{Im}(V_{ud}^* V_{cd} V_{ub} V_{cb}^*)| = A_{uc}$. Durch dieses einfache Umsortieren kann man feststellen, daß alle Dreiecke in der Tat dieselbe Fläche besitzen. Mit einer günstigen Wahl kann die Größe der Fläche einfach berechnet werden. Mit dem Ausdruck in (41) folgt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(V_{ud}^* V_{ub} V_{td} V_{tb}^*)| \\ &= \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(c_{12} c_{13} c_{23} c_{13} s_{12} s_{23} s_{13} e^{-i\delta})| \\ &\approx \frac{1}{2} s_{12} s_{23} s_{13} \sin \delta \\ &= \frac{1}{2} A^2 \lambda^6 \eta \quad . \end{aligned} \quad (42)$$

Aufgrund der speziellen Struktur der Flächen A_{jk} (siehe z. B. in (41)), die darin besteht, daß die einzelnen Quarks sowohl konjugiert als auch nicht konjugiert vorkommen, bleibt der Wert der Fläche invariant bei einer Umparametrisierung der Quarkfelder. Der einzige Effekt einer Umparametrisierung ist, daß sich die Dreiecke drehen.

Die Entwicklung der letzten Jahre hat eine stetige Reduktion der Fehlergrenzen der einzelnen CKM-Elemente gebracht, trotzdem ist vor allem die dritte Zeile und Spalte mit noch unbefriedigend großen Fehlern verbunden. Entsprechend den neuesten Daten aus dem Particle Physics Booklet von 1998 [26] sehen die experimentellen Werte unter Benutzung der Unitaritätsrelation wie folgt aus:

$$\mathbf{V}_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 0.9745 \text{ bis } 0.9760 & 0.217 \text{ bis } 0.224 & 0.0018 \text{ bis } 0.0045 \\ 0.217 \text{ bis } 0.224 & 0.9737 \text{ bis } 0.9753 & 0.036 \text{ bis } 0.042 \\ 0.004 \text{ bis } 0.013 & 0.035 \text{ bis } 0.042 & 0.9991 \text{ bis } 0.9994 \end{pmatrix} . \quad (43)$$

Zum Abschluß dieses Unterkapitels sollen noch einige Bemerkungen zur Messung der CKM-Elemente folgen. Ein großes Problem bei allen Messungen stellt das Confinement der QCD dar. Das Element V_{ud} wird über den Kern- β -Zerfall $u \rightarrow d e^+ \nu_e$ gemessen, wobei Übergänge hoher Wahrscheinlichkeit (supererlaubte $O^+ \rightarrow O^+$ -Übergänge) benutzt werden. In die theoretische Rechnung müssen Modelle über die explizite Kernstruktur eingehen. In naher Zukunft wird am Paul-Scherrer-Institut ein alternatives Experiment durchgeführt, welches die Reaktion $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$ ausnutzt. Der Vorteil hierbei ist die vergleichsweise einfache Struktur der Pionen. Für die Bestimmung von V_{us} werden Wirkungsquerschnitte des Prozesses $K \rightarrow \pi e^+ \nu_e$, $\pi \mu^+ \nu_\mu$ jeweils für K^0 und K^+ gemessen.

Das Element V_{cd} bestimmt man über den Neutrino-Einfang an einem Kern A ($\nu_\mu A \rightarrow \mu^+ \mu^- X_{\text{something}}$ bzw. $\bar{\nu}_\mu A \rightarrow \mu^+ \mu^- X_{\text{something}}$). Als schweres isoskalares Target (Anzahl Neutronen = Anzahl Protonen) hat sich am besten CaCO_3 (Carrera-Marmor) bewährt.

Die Messung des CKM-Matrixelementes V_{cs} bestimmt man über $D^+ \rightarrow K^0 e^+ \nu_e$ bzw. $D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e$.

Die vier bisher diskutierten Elemente bilden die sogenannte 2×2 Cabibbo-Matrix. In einem 2-Familien-SM muß diese Matrix per Konstruktion unitär sein und besitzt somit nur einen reellen physikalischen Freiheitsgrad. Dies bedeutet, daß die im K -System gemessene CP-Verletzung [29] in einem 2-Familien-SM nicht mittels der Cabibbo-Matrix erklärt werden könnte. Diese Matrixelemente waren bereits bis 1975 vermessen und im Rahmen der Meßgenauigkeit gab es keine Abweichungen von der Unitarität, so daß sich von daher keine Anhaltspunkte auf eine 3. Familie ergaben.

Die Bestimmung des Elementes V_{cb} erfolgt über semileptonische Zerfälle, wobei die *Heavy Quark Effective Theory* (HQET) eine nahezu modellunabhängige Analyse gestattet [26]. Der exklusive Zerfall $B \rightarrow \bar{D}^* l^+ \nu_l$ ist dazu sehr gut geeignet. Der Prozeß $B \rightarrow \bar{D} l^+ \nu_l$ gibt ein konsistentes Resultat jedoch mit geringerer Genauigkeit.

Die Messung des Elements V_{ub} erfolgt mittels der Dilepton-Methode auf der $Y(4s)$ -Resonanz $e^+ e^- \rightarrow Y(4s) \rightarrow B \bar{B}$.

Die Elemente V_{td} , V_{ts} und V_{tb} sind noch nicht direkt gemessen worden. Die indirekten Resultate sind jedoch konsistent mit den direkten Messungen plus den Annahmen: 3 Familien und Unitarität der CKM-Matrix. Die Größe $|V_{tb}^* V_{td}|$ kann am $B \bar{B}$ -Mixing studiert werden und V_{ts} am Zerfall $b \rightarrow s \gamma$. Die genaue Bestimmung dieser Elemente wird eine gewaltige Herausforderung für die BABAR-Kollaboration am SLAC und die Belle-Kollaboration am KEK sein.

2.1.3 Die CP-Verletzung

Es soll im weiteren untersucht werden, inwieweit nicht-verschwindende komplexe Phasen in der Lagrange-Funktion zur CP-Verletzung führen können. Dazu soll zuerst der sehr einfache Prozeß der Quark-Quark-Streuung in Born-Näherung mittels W -Boson-Austausch betrachtet werden²: $q_a q_b \rightarrow q_c q_d$ bzw. abgekürzt: $a b \rightarrow c d$. Die Amplitude hat schematisch die Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\sim (\bar{q}_c \gamma_{\mu L} V_{ca} q_a) (\bar{q}_b \gamma^{\mu L} V_{bd} q_d)^+ \\ &= V_{ca} V_{db}^* (\bar{q}_c \gamma_{\mu L} q_a) (\bar{q}_d \gamma^{\mu L} q_b) \quad . \end{aligned} \quad (44)$$

Es gilt weiter $\mathcal{M}_{a b \rightarrow c d} = \mathcal{M}_{\bar{c} \bar{d} \rightarrow \bar{a} \bar{b}}$, wobei $\bar{a} = \bar{q}_a$ ist. Der hermitisch konjugierte Prozeß: $\bar{a} \bar{b} \rightarrow \bar{c} \bar{d}$, der identisch ist mit: $c d \rightarrow a b$, wird durch:

$$\mathcal{M}^+ \sim V_{ca}^* V_{db} (\bar{q}_a \gamma_{\mu L} q_c) (\bar{q}_b \gamma^{\mu L} q_d) \quad (45)$$

beschrieben. Setzt man CP-Invarianz voraus, dann muß gelten, daß der CP-gespiegelte Prozeß von $a b \rightarrow c d$ eine Amplitude haben muß, die identisch mit \mathcal{M}^+ ist:

$$\mathcal{M}^{CP} = \mathcal{M}^+ \quad , \quad (46)$$

da CP-Invarianz sofort T-Invarianz impliziert³ und $c d \rightarrow a b$ der T-gespiegelte Prozeß ist. Mögliche Konstanten vor den Dirac-Strömen, wie z. B. Massen, Kopplungskonstanten oder numerische Vorfaktoren, ändern sich unter der CP-Transformation nicht, so daß bei Anwendung des Ladungskonjugations- und Paritätsoperators auf Gleichung (44) folgt:

$$\mathcal{M}^{CP} \sim V_{ca} V_{db}^* (\bar{q}_a \gamma_{\mu L} q_c) (\bar{q}_b \gamma^{\mu L} q_d) \quad , \quad (47)$$

was nur identisch mit \mathcal{M}^+ ist, wenn $V_{ca} V_{db}^*$ reell ist.

Mit anderen Worten sind die Kopplungskonstanten bzw. Vorfaktoren reell oder können durch eine Phasentransformation reell gemacht werden, dann ist die Theorie CP-invariant und damit T-invariant. Bei komplexen Kopplungskonstanten (CKM-Matrix) gilt nicht mehr $\mathcal{M}^{CP} = \mathcal{M}^+$, was potentiell zur CP-Verletzung führen kann. In dem hier präsentierten einfachen Beispiel, welches nur zur Veranschaulichung des Zusammenhanges zwischen komplexen Phasen und CP-Verletzung dienen sollte, ist die Phase allerdings unphysikalisch. Es gilt:

$$|\mathcal{M}^{CP}|^2 = |\mathcal{M}^+|^2 \quad , \quad (48)$$

bzw. man könnte die Phase durch die Reparametrisierung eines Quarkfeldes von vornherein zum Verschwinden bringen und würde in dem hier präsentierten Fall sogar beide Amplituden zur Übereinstimmung bringen.

²Man kann sich hier eine Modell-Welt vorstellen aus 4 Quarks und einen W -Boson, die CPT-invariant ist.

³Für jede Lorentz-invariante Theorie mit nur lokalen Wechselwirkungen gilt das CPT-Theorem.

Es soll nun erörtert werden, unter welchen Umständen CP-Verletzung auftreten kann. Im SM ist die einzige Quelle für CP-Verletzung die CKM-Matrix. Die daraus resultierende Phase nennt man deshalb „schwache“ Phase. Die schwache Phase eines einzelnen Terms ist immer konventionsabhängig und somit unphysikalisch (siehe Beispiel oben).

Es gibt noch eine andere Art von Phasen in Streu- und Zerfallsamplituden, die hauptsächlich von der starken Wechselwirkung stammen [30]. Deshalb werden sie als „starke“ Phasen bezeichnet. Sie besitzen dasselbe Vorzeichen in \mathcal{M}_f und $\mathcal{M}_{\bar{f}}$ und tragen somit nicht zur CP-Verletzung bei.

Es ist sinnvoll, \mathcal{M} in die drei folgenden Bestandteile aufzuspalten: die Amplitude A , die schwache Phase $\exp(i\phi)$ und die starke Phase $\exp(i\delta)$. Im allgemeinen tragen mehrere Teilprozesse bei, so daß man für die Amplitude des Zerfalls $i \rightarrow f$ schreiben kann:

$$\mathcal{M}_f = \sum_k A_k e^{i(\delta_k + \phi_k)} \quad (49)$$

und analog für den CP-konjugierten Prozeß:

$$\mathcal{M}_{\bar{f}}^{CP} = \sum_k A_k e^{i(\delta_k - \phi_k)} \quad (50)$$

Die phasenkonventionsunabhängige Größe ist [30]:

$$\left| \frac{\mathcal{M}_{\bar{f}}^{CP}}{\mathcal{M}_f} \right| = \left| \frac{\sum_k A_k e^{i(\delta_k + \phi_k)}}{\sum_k A_k e^{i(\delta_k - \phi_k)}} \right| \neq 1 \quad \implies \quad \text{CP - Verletzung} \quad (51)$$

Diese CP-Verletzung in Zerfällen wird als *direkte CP-Verletzung* bezeichnet. Die Berechnung der starken Phase ist hierbei der schwierigste Punkt, da langreichweitige Beiträge (Confinement) eine Rolle spielen.

Neben dieser Art der CP-Verletzung im Zerfall gibt es noch die Möglichkeit der sogenannten indirekten CP-Verletzung, z. B. beim $B\bar{B}$ -Mixing. Das B - und \bar{B} -Meson sind Flavor-Eigenzustände. Sie können unter der schwachen Wechselwirkung ineinander übergehen. Die Zeitentwicklung einer beliebigen Kombination $a|B\rangle + b|\bar{B}\rangle$ wird durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \langle B|H_{\text{eff}}|B\rangle & \langle B|H_{\text{eff}}|\bar{B}\rangle \\ \langle \bar{B}|H_{\text{eff}}|B\rangle & \langle \bar{B}|H_{\text{eff}}|\bar{B}\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{11} - \frac{i}{2}\Gamma_{11} & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{21} - \frac{i}{2}\Gamma_{21} & M_{22} - \frac{i}{2}\Gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (52) \end{aligned}$$

Das CPT-Theorem erfordert $M_{11} = M_{22}$, $\Gamma_{11} = \Gamma_{22}$. Wegen der Hermitezität des Zeitentwicklungsoperators gilt⁴: $M_{12} = M_{21}^*$, $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}^*$. Man erhält somit:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} - \frac{i}{2}\Gamma_{11} & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^* & M_{11} - \frac{i}{2}\Gamma_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (53)$$

⁴Unter der zusätzlichen Annahme der CP-Invarianz bzw. T-Invarianz ergibt sich: $\langle B|H_{\text{eff}}|\bar{B}\rangle = \langle \bar{B}|H_{\text{eff}}|B\rangle$.

Eine weitere phasenkonventionsunabhängige Größe ist [30]:

$$\left| \frac{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}} \right| \quad . \quad (54)$$

Sobald die CP-Symmetrie erhalten ist, müssen die Masseneigenzustände (B_H , B_L) gleichzeitig CP-Eigenzustände sein. In diesem Fall verschwinden die relativen Phasen und der Quotient in Gleichung (54) ist 1. Es gilt:

$$\left| \frac{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}} \right| \neq 1 \quad \implies \quad \text{CP - Verletzung} \quad . \quad (55)$$

Dieser Typ von CP-Verletzung wird als *indirekte CP-Verletzung* bezeichnet.

2.2 Die Quantenchromodynamik

Es hat sich herausgestellt und wird in dieser Arbeit sehr ausführlich geschildert, daß die Quantenchromodynamik (QCD) eine sehr wichtige Rolle bei der Analyse von „heavy flavor“-Physik spielt. Die QCD ist eine nach dem Vorbild der Quantenelektrodynamik (QED) aufgebaute Theorie. Sie besitzt jedoch eine große Anzahl neuer Eigenschaften, die diese Theorie komplizierter machen. Da diese Schwierigkeiten von einer völlig anderen Struktur sind, als die des GSW-Modells, soll im folgenden kurz auf sie eingegangen werden.

Der Weg zur QCD, einer Eichsymmetrie mit der Symmetriegruppe $SU(3)_C$, war keineswegs geradlinig. Die approximative Massenentartung des Neutrons und des Protons legte eine Symmetrie nahe, welche man in Analogie zum Spin als Isospin bezeichnet. Die zugehörige Lie-Gruppe war die $SU(2)_F$. Die Brechung dieser Symmetrie versuchte man, dynamisch durch die elektromagnetische Wechselwirkung zu begründen. Mit der Möglichkeit immer höherer Energien fand man mehr und mehr Teilchen (Teilchenzoo), die sich nicht mehr in das $SU(2)$ -Schema des starken Isospins einordnen ließen. Man führte zu diesem Zweck die $SU(3)_F$ und später die $SU(4)_F$ ein, allerdings waren diese Symmetrien viel stärker gebrochen, als die der $SU(2)_F$. Trotz allem hatten diese Zugänge Aussagekraft, in dem Sinne, daß man neue Teilchen und deren Eigenschaften vorhersagen konnte. Da die $SU(3)$ später eine wichtige Rolle spielen wird, soll kurz auf ihre mathematische Struktur eingegangen werden.

Die $SU(3)$ ist die Gruppe der speziell unitären 3×3 -Matrizen. Im strengen, mathematischen Sinn müßte man sagen, daß die niedrigst-dimensionale, nichttriviale, irreduzible Darstellung der $SU(3)$ alle unitären 3×3 -Matrizen mit der Determinante 1 umfaßt. Diese Darstellung wird als definierende oder fundamentale Darstellung bezeichnet. Jede $SU(3)$ -Darstellung besitzt 8 Generatoren \mathbf{T}_a (siehe Anhang D), von denen 2 gleichzeitig diagonalisiert werden können. Da diese Generatoren hermitesch sind, bedeutet diese Aussage, daß es zwei gleichzeitig meßbare Observablen gibt. In der mathematischen Terminologie sagt man, es handelt sich um eine Gruppe mit Rang = 2. Dies wiederum impliziert die Existenz zweier Casimir-Operatoren, also

zweier Invarianten der Gruppe. Die Generatoren spannen die zur Gruppe gehörige Lie-Algebra $su(3)$ auf, und es gilt die folgende Kommutationsrelation:

$$[\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b] = i f_{abc} \mathbf{T}_c \quad , \quad (56)$$

mit den vollständig antisymmetrischen Strukturkonstanten f_{abc} . In der Quantenmechanik mißt man nur Eigenwerte zu Observablen. Da es sich bei der $SU(3)$ um eine Rang-2-Gruppe handelt (2 Observable bzw. 2 Casimir-Operatoren), kann man die Eigenwerte in 2 dimensional Bildern (Multipletts) anordnen. Jedem Paar von Eigenwerten wird dann ein Teilchenname zugeordnet. Dazu definiert man die folgenden Linearkombinationen von Generatoren [31]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\pm &= \mathbf{T}_1 \pm i \mathbf{T}_2 \quad , \quad \mathbf{U}_\pm = \mathbf{T}_6 \pm i \mathbf{T}_7 \quad , \quad \mathbf{V}_\pm = \mathbf{T}_4 \pm i \mathbf{T}_5 \quad , \\ \mathbf{T}_3 &= \mathbf{T}_3 \quad , \quad \mathbf{Y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{T}_8 \quad . \end{aligned} \quad (57)$$

Aus den folgenden Kommutationsrelationen:

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_3, \mathbf{T}_\pm] &= \pm \mathbf{T}_\pm \quad , \quad [\mathbf{Y}, \mathbf{T}_\pm] = 0 \quad , \\ [\mathbf{T}_3, \mathbf{U}_\pm] &= \mp \frac{1}{2} \mathbf{U}_\pm \quad , \quad [\mathbf{Y}, \mathbf{U}_\pm] = \pm \mathbf{U}_\pm \quad , \\ [\mathbf{T}_3, \mathbf{V}_\pm] &= \pm \frac{1}{2} \mathbf{V}_\pm \quad , \quad [\mathbf{Y}, \mathbf{V}_\pm] = \pm \mathbf{V}_\pm \end{aligned} \quad (58)$$

folgt, daß \mathbf{U}_\pm , \mathbf{V}_\pm und \mathbf{T}_\pm Auf- bzw. Absteigeoperatoren sind. Die Wirkung dieser Operatoren ist in der Abbildung 2 verdeutlicht.

Man bemerke hierbei die Analogie zur wohlbekannten $SU(2)$ -Gruppe mit nur einem Auf- und Absteigeoperator. Bei dieser Gruppe handelt es sich um eine Rang-1-Gruppe, und sie besitzt deshalb nur 1-dimensionale Multipletts.

Über die Form und Besetzung eines allgemeinen Multipletts lassen sich einige nützliche Aussagen beweisen. Ein Multiplett ist immer konvex und symmetrisch bei Spiegelungen an der y -Achse. Die Multiplizität der Punkte, d. h. die Besetzung eines Punktes mit unterschiedlichen Zuständen, wächst vom Rand beginnend um 1, bis eine dreieckige Konfiguration erreicht ist, von wo ab die Multiplizität konstant bleibt. Jeder Randpunkt besitzt die Multiplizität 1.

Die $SU(3)$ besitzt zwei nichtäquivalente, irreduzible 3-dimensionale Darstellungen, die mit $\mathbf{3}$ und $\bar{\mathbf{3}}$ bezeichnet werden. Letztere wird als konjugierte Darstellung zur $\mathbf{3}$ bezeichnet. Die Multipletts dieser Darstellung findet man in Abbildung 3.

Aus diesen beiden Darstellungen kann man alle höher dimensional irreduziblen Darstellungen aufbauen. Da man zum damaligen Zeitpunkt bereits vermutete, daß es in dem „Teilchenzoo“ ein fundamentales Ordnungsprinzip geben muß, wertete man vielleicht die letztere Möglichkeit als einen Hinweis. Dies war Veranlassung, in Abbildung 3 bereits die drei leichten Quarks bzw. Antiquarks einzuzeichnen. Hierbei übernehmen die Quarks jedoch vorerst nur die Rolle von

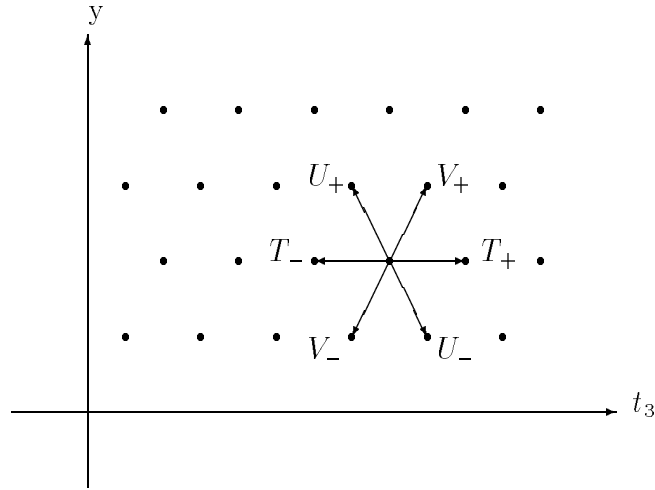


Abbildung 2: Die Wirkungsweise der Auf- bzw. Absteigeoperatoren in einem $SU(3)$ -Multipllett .

mathematischen Objekten, die es ermöglichen, ein System in die Welt der Hadronen zu bringen. Die Hadronen-Multipletts lassen sich nun wie folgt aus den fundamentalen Darstellungen $\mathbf{3}$ und $\bar{\mathbf{3}}$ aufbauen:

- Mesonen: $\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$, mit einer 8- und 1-dimensionalen Darstellung (siehe Abbildung 4),
- Baryonen: $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$.

Ausgehend vom heutigen Wissensstand ist es auch sehr leicht zu erklären, daß durch die Massenaufspaltung der drei leichten Quarks die $SU(3)_F$ keine exakte Symmetrie sein kann.

Die bisher gemachten Aussagen lassen sich auf die $SU(4)_F$ -Gruppe verallgemeinern, bei der es sich um eine Rang-3-Gruppe handelt. Aus diesem Grund werden 3-dimensionale Multipletts benötigt. Deshalb wird die Konstruktion von direkten Produkten mittels graphischer Methoden (angedeutet in Abbildung 4) sehr schwierig. Für die in dieser Arbeit interessanten B -Mesonen würde man sogar die $SU(5)_F$ -Gruppe benötigen, die 4-dimensionale Multipletts besitzt. Desweiteren ist das b -Quark viel schwerer im Vergleich zu den 4 leichteren Quarks, so daß man kaum noch von einer Symmetrie sprechen kann.

Wie bereits erwähnt, sind die Quarks bisher nur mathematische ad hoc eingeführte Objekte, die eine Art Buchhaltung ermöglichen. In der Tat war die Suche nach diesen Objekten bis 1971 ergebnislos geblieben. Erst zu diesem Zeitpunkt konnte man Energien erreichen, die die innere Struktur von Hadronen auflösen konnten [32], was die Quarks nun auch vom physikalischen Standpunkt interessant machte. Das hier eingeführte naive Quark-Modell hatte einige schwerwiegende Probleme. Es existiert ein Hadron Δ^{++} mit 3 u -Quarks und dem Spin $3/2$. Demzufolge sind 3 identische Quarks in einem symmetrischen Grundzustand anzuordnen. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Fermi-Statistik. Eine weitere Frage blieb offen. Es konnten aus

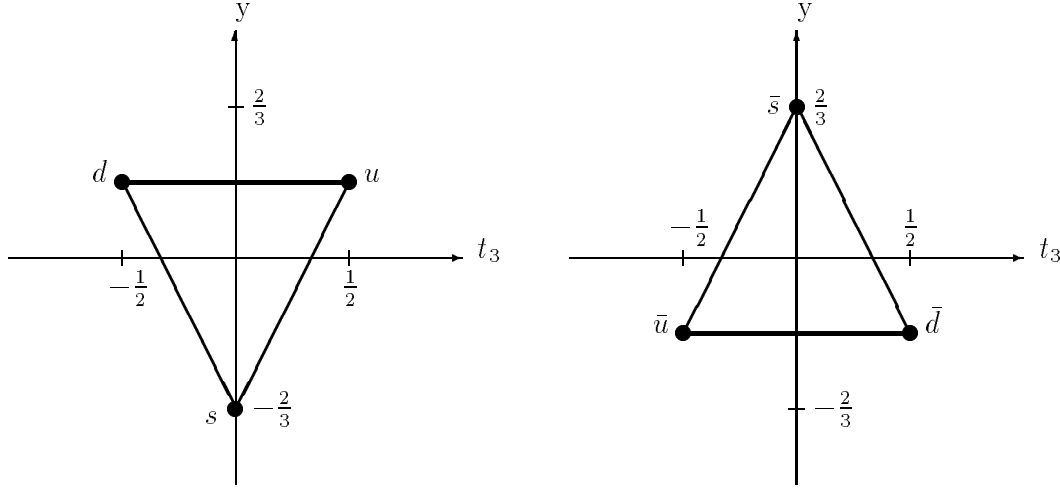


Abbildung 3: Die zwei nichtäquivalenten, nichttrivialen, irreduziblen Darstellungen der $SU(3)$ mit niedrigster Dimension. Im linken Teil ist die $\mathbf{3}$ -Darstellung gezeigt und rechts die zugehörig konjugierte.

dem naiven Quark-Modell alle gefundenen Sequenzen $q\bar{q}$, qqq und $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ reproduziert werden, aber wieso es keine Objekte, wie qq , $\bar{q}\bar{q}$ oder einzelne Quarks gab, blieb unklar.

Die Lösung dieser Probleme war die Einführung einer neuen Quantenzahl; der „Farbe“ und damit die Geburtsstunde der QCD [33]!

Jedes Quark kommt in drei verschiedenen Farben vor: rot, grün, blau⁵. Die Eichgruppe der QCD ist die $SU(3)_C$, wobei das Label „C“ andeuten soll, daß sie vom physikalischen Standpunkt nichts mit der bisher besprochenen Flavor-Symmetrie zu tun hat. Die Lagrange-Dichte der QCD hat das folgende Aussehen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{QCD}} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 \\
& + \bar{q}(i\not{\partial} - m_q)q + \chi^{a*}\partial^\mu\partial_\mu\chi^a \\
& - \frac{g_3}{2}f^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{g_3^2}{4}f^{abe}f^{cde}A_\mu^aA_\nu^bA^{c\mu}A^{d\nu} \\
& + g_3\bar{q}_iT_{ij}^a\gamma^\mu q_j A_\mu^a + g_3f^{abc}(\partial^\mu\chi^{a*})\chi^b A_\mu^c, \quad (59)
\end{aligned}$$

wobei q die Color-Triplets $q = (q_r, q_b, q_g)$ der Quark-Flavors darstellt. Die QCD-Kopplungskonstante wird mit g_3 bezeichnet, A_μ^a ist das nichtabelsche Gluonen-Feld, χ^a repräsentiert das Geist-Feld (wird nicht weiter betrachtet, da keine geschlossenen Gluonen-Schleifen auftreten) und ξ ist der Eichparameter. Die Generatoren und Strukturkonstanten

⁵Ein Baryon wird schematisch durch die folgende Wellenfunktion beschrieben: $|qqq\rangle_{\text{antisymmetrisch}} = |\text{Farbe}\rangle_{\text{antisymmetrisch}} \times |\text{Raum-Zeit, Spin, Flavor}\rangle_{\text{symmetrisch}}$. Man bemerkt, daß dies in der Kernphysik bei einem 3-Nukleonen-System verschieden ist: $|NNN\rangle_{\text{antisymmetrisch}} = |\text{Raum-Zeit, Spin, Isospin}\rangle_{\text{antisymmetrisch}}$

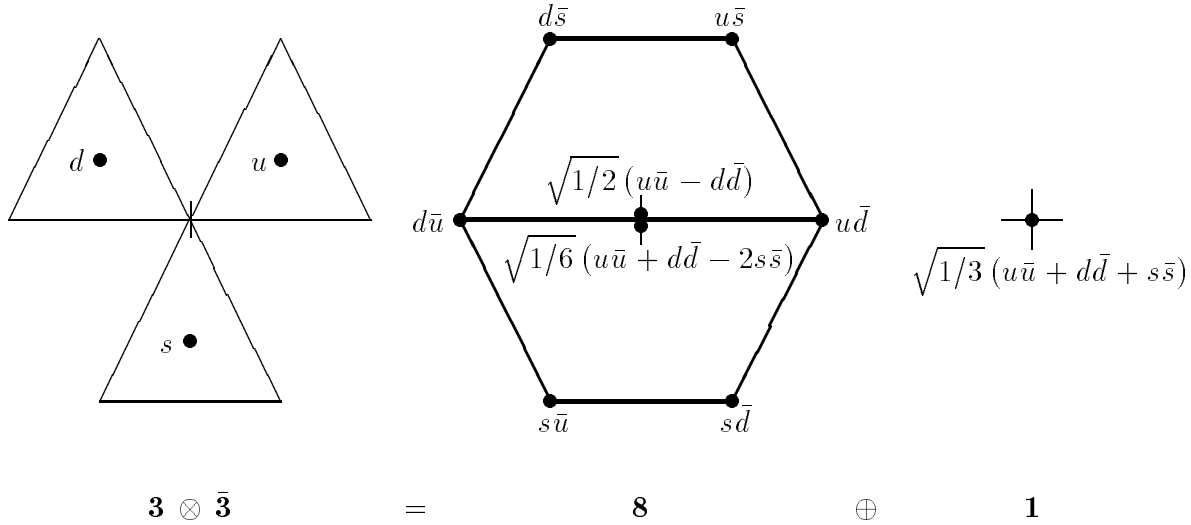


Abbildung 4: Konstruktion des Mesonen-Oktetts bzw. Singletts aus den definierenden Darstellungen der $SU(3)$. Der Quarkinhalt ist offensichtlich, wenn man sich überlegt, daß das Singlett in allen Quarkflavors symmetrisch sein muß und die Mesonen in der Mitte des Oktetts orthonormal aufeinander stehen müssen und eines davon dem Isotriplett $(d\bar{u}, \sqrt{1/2}(u\bar{u} - d\bar{d}), -u\bar{d})$ angehören muß.

sind durch \mathbf{T}^a und f^{abc} dargestellt. Die Buchstaben a, b, c sind die Farbindizes und laufen von 1 bis 8.

Die $SU(3)_C$ -Symmetrie wird im Gegensatz zu den Flavor-Symmetrien als exakt angenommen. Ein weiterer Vorteil der QCD ist, daß sie als Bausteine punktförmige Teilchen besitzt, aus denen man prinzipiell Mesonen und Baryonen aufbauen kann. Ein Postulat der QCD ist, daß es in der Natur nur farblose Teilchen gibt, d. h. weiße Teilchen im Singlett-Zustand. Diese Teilchen sind invariant unter einer $SU(3)_C$ -Transformation. Damit sind freie Quarks und Objekte wie $qq, \bar{q}\bar{q}$ nicht erlaubt.

Die QCD ist prinzipiell in derselben Weise aufgebaut wie die QED, sie besitzt jedoch Eigenschaften, die eine ähnlich präzise Auswertung physikalischer Größen wie in der QED unmöglich machen und u. a. mit der Unbeobachtbarkeit freier Quarks zu tun haben. Um diese Problematik zu skizzieren, soll die Abhängigkeit der Kopplungskonstanten von der Energie-Skala in niedrigster Ordnung betrachtet werden [34]:

$$\begin{aligned}
 \text{QED} \quad : \quad \alpha_{\text{QED}}(Q^2) &= \frac{\alpha_{\text{QED}}(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_{\text{QED}}(\mu^2)}{4\pi} \left[-\frac{4}{3}\right] \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad , \\
 \text{QCD} \quad : \quad \alpha_S(Q^2) &= \frac{\alpha_S(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_S(\mu^2)}{4\pi} \frac{1}{3} [11 n_c - 2 n_f] \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad ,
 \end{aligned} \tag{60}$$

mit $n_c = 3 = \text{Zahl der Farben}$, $n_f = \text{Zahl der aktiven Flavor} \leq 6$ und $\alpha_S = g_3^2/(4\pi)$. Der Term $\ln Q^2/\mu^2$ besitzt in beiden Theorien ein unterschiedliches Vorzeichen. In der QED wird

das Vakuum abgeschirmt und die Kopplungsstärke steigt mit der Energie, wohingegen in der QCD der umgekehrte Effekt auftritt. Die Energieabhängigkeit der Kopplung in der QCD kann in Abbildung 5 gefunden werden.

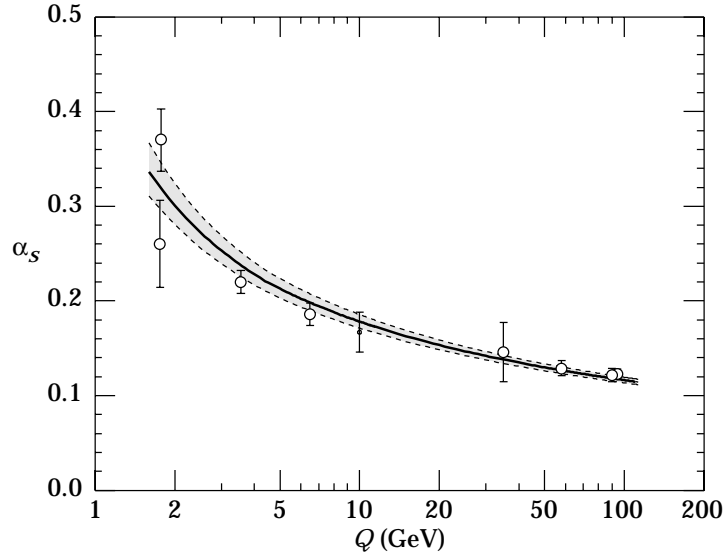


Abbildung 5: Skalisierung der starken Kopplungskonstanten α_s . Bildquelle: Particle Data Group

Diese Kurve sagt nun aus, daß man bei sehr hohen Energien sicher Störungstheorie betreiben darf. Man sagt, die Theorie ist asymptotisch frei. Diese Eigenschaft wird in dieser Arbeit sehr extensiv ausgenutzt. Die Unterschiede zur QED manifestieren sich in diesem Bereich vor allem durch den nichtabelschen Charakter und durch die notwendige Bestimmung von Farbfaktoren (siehe dazu Anhang D).

Wie auch immer, mit sinkender Energie steigt die Kopplungskonstante und die asymptotische Konvergenz der Störungsreihe muß ab einer bestimmten Energieskala in Frage gestellt werden. Mit der Definition [34]:

$$\Lambda^2 = \mu^2 \exp \left[\frac{-12\pi}{(11 n_c - 2 n_f) \alpha_s(\mu^2)} \right] \quad (61)$$

kann man die Gleichung (60) wie folgt umschreiben:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(11 n_c - 2 n_f) \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \quad (62)$$

Der Parameter Λ stellt eine experimentell zu bestimmende Referenzskala dar, die zwischen 100 und 500 MeV liegt. Man kann in Λ eine Grenze sehen, zwischen einer Welt aus quasifreien Quarks sowie Gluonen und einer Welt aus Nukleonen, Pionen u. s. w. .

Diese soeben diskutierte Eigenschaft der QCD nennt man Confinement. Es gibt leider noch keinen befriedigenden Beweis, ob das Confinement streng aus der QCD folgt. Für den nicht mehr durch die Störungstheorie zugänglichen Bereich gibt es verschiedene Ansätze, wie z. B. Gitter-Eichtheorien, $1/N$ -Entwicklungen, QCD-Summenregeln u. s. w. .

Die QCD basiert auf Teilchen (Quarks, Gluonen), die in Experimenten nicht beobachtbar sind. Wie aber kann man nun sicher sein, daß diese Theorie eine adäquate Beschreibung der Natur darstellt? Neben der aus tiefinelastischen Streuexperimenten folgenden inneren Struktur von Nukleonen ergibt sich ein weiterer wichtiger Schluß aus hochenergetischen e^+e^- -Kollisionen. Man erwartet die Ausbildung von hadronischen Jets. Die erste Entdeckung eines 2-Jet-Ereignisses wurde 1975 vom SLAC gemeldet [35], während 3-Jet-Ereignisse 1979 von DESY bestätigt wurden [36]. Diese Experimente stimmen mit den Vorhersagen der QCD sehr gut überein. Derartige Experimente und Rechnungen sind sehr kompliziert und führen weit über den hier gespannten Rahmen hinaus.

2.3 Erweiterung des Standardmodells

Es gibt gegenwärtig keine experimentellen Anhaltspunkte für Abweichungen vom Standardmodell (SM). Auf theoretischer Seite vermehren sich trotz allem die Stimmen, daß das SM eine effektive Theorie darstellt.

Das SM besitzt einige inhärente Schwierigkeiten, z. B. kann es die Größe der Massen der Elementarteilchen und die Familienreplikation nicht erklären. Das SM macht keine Aussage, warum die Ladung quantisiert ist, warum es drei Farbfreiheitsgrade gibt und wieso die CKM-Matrixelemente die experimentell gemessenen Werte haben. Es ist zum heutigen Zeitpunkt offen, ob derartige Fragen überhaupt geklärt werden können.

Weiterhin ist die Massengenerierung der Elementarteilchen mit Hilfe des Higgs-Mechanismus (siehe dazu Kapitel 2.1) eine ebenfalls noch experimentell offene Frage. Ebenso kann gezeigt werden, daß eine Vereinigung der elektroschwachen Theorie und der QCD (innere Symmetrie: $SU(3)_C \times SU(2)_I \times U(1)_Y$) mit der Gravitation (Raum-Zeit-Symmetrie: $SO(3,1) \times \mathcal{R}$) im bisher bekannten Kalkül einer Quantenfeldtheorie ohne weitere Annahmen nicht durchführbar ist.

Das letztere Problem kann durch die Einführung einer neuen Symmetrie, der *Supersymmetrie* gelöst werden. Diese Symmetrie verbindet fermionische Freiheitsgrade mit bosonischen. Um diese Theorie phänomenologisch akzeptabel zu machen, ist man gezwungen, sehr viele freie Parameter einzuführen, was letztlich die Eleganz dieses Konzeptes zerstört. Neben dem Wunsch einer vereinheitlichten Theorie gibt es allerdings ein weiteres Argument für die Supersymmetrie. Sie löst das sogenannte Hierarchie-Problem und „schützt“ somit die Higgs-Bosonen-Masse vor quantenmechanischen Korrekturen, die von schweren Teilchen stammen.

Neben dieser gegenwärtig favorisierten Erweiterung des SM werden in dieser Arbeit noch das 2-Higgs-Dublett-Modell (2HDM) und Links-Rechts-Modelle betrachtet. Das 2HDM kann als Vorarbeit zu einem supersymmetrischen Modell angesehen werden, da die Supersymmetrie einen

erweiterten Higgs-Sektor aus mindestens 2 Higgs-Dubletts erfordert. Man kann das 2HDM jedoch auch in Hinsicht auf den vollkommen unbekannten Higgs-Sektor des SM als eigenständige Erweiterung auffassen. Die Links-Rechts-symmetrischen Modelle könnten eine Erklärung für die Paritätsverletzung darstellen und somit verdeutlichen, warum die beobachteten linkshändigen Fermionen in $SU(2)$ -Dubletts und die rechtshändigen in Singletts angeordnet sind.

2.3.1 Das 2-Higgs-Dublett-Modell

Im Gegensatz zum SM werden im 2-Higgs-Dublett-Modell (2HDM) zwei Higgs-Dubletts ϕ_1 und ϕ_2 angenommen. Damit verändert sich das triviale Higgs-Potential des SM zu [37]:

$$\begin{aligned} V(\phi_1, \phi_2) = & \lambda_1 (\phi_1^\dagger \phi_1 - v_1^2)^2 + \lambda_2 (\phi_2^\dagger \phi_2 - v_2^2)^2 \\ & + \lambda_3 \left[(\phi_1^\dagger \phi_1 - v_1^2) + (\phi_2^\dagger \phi_2 - v_2^2) \right]^2 \\ & + \lambda_4 \left[(\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_2^\dagger \phi_2) - (\phi_1^\dagger \phi_2) (\phi_2^\dagger \phi_1) \right] \\ & + \lambda_5 \left[\text{Re}(\phi_1^\dagger \phi_2) - v_1 v_2 \cos \xi \right]^2 + \lambda_6 \left[\text{Im}(\phi_1^\dagger \phi_2) - v_1 v_2 \sin \xi \right]^2, \end{aligned} \quad (63)$$

welches mit der Voraussetzung $\lambda_i \geq 0$ die folgenden beiden Vakuumerwartungswerte liefert:

$$\langle \phi_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \langle \phi_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 e^{i\xi} \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Aus der letztgenannten Gleichung kann man sofort die Schlußfolgerung ziehen, daß das 2HDM mit der Forderung $\sin \xi \neq 0$ CP-Verletzung zulassen würde.

Weiterhin ist für $\lambda_5 = \lambda_6$ evident, daß die letzten beiden Summanden des Higgs-Potentials in einem Term wie folgt zusammengefaßt werden können:

$$\begin{aligned} & (\text{Re}(\phi_1^\dagger \phi_2))^2 - 2 v_1 v_2 \cos(\xi) \text{Re}(\phi_1^\dagger \phi_2) + v_1^2 v_2^2 \cos^2(\xi) \\ & + (\text{Im}(\phi_1^\dagger \phi_2))^2 - 2 v_1 v_2 \sin(\xi) \text{Im}(\phi_1^\dagger \phi_2) + v_1^2 v_2^2 \sin^2(\xi) \\ & = |\phi_1^\dagger \phi_2|^2 - 2 v_1 v_2 \left[\cos(\xi) \text{Re}(\phi_1^\dagger \phi_2) + \sin(\xi) \text{Im}(\phi_1^\dagger \phi_2) \right] + v_1^2 v_2^2 \\ & = |\phi_1^\dagger \phi_2|^2 - v_1 v_2 \left(e^{i\xi} \phi_1 \phi_2^\dagger + e^{-i\xi} \phi_1^\dagger \phi_2 \right) + v_1^2 v_2^2 \\ & = \left(\phi_1^\dagger \phi_2 - v_1 v_2 e^{i\xi} \right) \left(\phi_1 \phi_2^\dagger - v_1 v_2 e^{-i\xi} \right) \\ & = |\phi_1^\dagger \phi_2 - v_1 v_2 e^{i\xi}|^2. \end{aligned} \quad (65)$$

Damit kann durch eine geschickte Phasenwahl eines Higgs-Dubletts die Phase $\exp(i\xi)$ entfernt werden, und es folgt ein CP-invariantes Potential.

Im weiteren soll $\sin \xi = 0$ angenommen werden, was insbesondere von supersymmetrischen Theorien favorisiert wird. Damit wird die CP-Verletzung in diesem Kontext nur durch die komplexe Phase der CKM-Matrix beschrieben.

Für die hier präsentierten Rechnungen sind die geladenen physikalischen Higgs-Teilchen wichtig. Diese ergeben sich wie folgt [37]:

$$H^\pm = -\phi_1^\pm \sin \beta + \phi_2^\pm \cos \beta \quad . \quad (66)$$

Neben diesen geladenen Teilchen gibt es noch drei neutrale physikalische Higgs-Teilchen. Somit besitzt der erweiterte Higgs-Sektor 6 freie Parameter (vorausgesetzt $\exp(i\xi) = 1$): 4 Higgs-Massen und v_1, v_2 bzw. wie aus Gleichung (63) ersichtlich: λ_i mit $i = 1 \dots 6$.

Es werden zwei Arten von Modellen⁶ unterschieden: Im Modell I koppeln die Quarks und Leptonen per Konstruktion nicht an ϕ_1 , sondern nur an ϕ_2 . Im Typ II koppeln die down-type Fermionen an ϕ_1 und die up-type Fermionen an ϕ_2 .

Der relevante Teil des Yukawa-Sektors, der die Kopplung der geladenen Higgs-Bosonen an Quarks beschreibt, sieht für beide Modelle wie folgt aus:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = g_2 \sum_{i,j=1}^3 \bar{u}_i \left(A_u \frac{m_{u_i}}{\sqrt{2} M_W} V_{\text{CKM}}^{ij} P_L - A_d V_{\text{CKM}}^{ij} \frac{m_{d_i}}{\sqrt{2} M_W} P_R \right) d_j H^+ + \text{h.c.} \quad . \quad (67)$$

Die Familienindizes sind durch i und j repräsentiert. Die Unterscheidung der zwei Modell-Typen erfolgt durch A_u und A_d . So gilt im 2HDM I:

$$A_u = A_d = \frac{1}{\tan \beta} \quad (68)$$

und im Modell II:

$$A_u = -\frac{1}{A_d} = \frac{1}{\tan \beta} \quad . \quad (69)$$

Der Schlüsselparameter beider Modelle ist $\tan \beta$. Er ist definiert durch $\tan \beta = v_2/v_1$. Der Modell-Typ II entspricht dem im Minimalen Supersymmetrischen SM verwirklichten Higgs-Sektor.

2.3.2 Links-Rechts-Modelle

Die Eichgruppe dieser Modelle ist die $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$. Sie stellen somit eine Verallgemeinerung des SM dar. Wie beim 2HDM kann man sie auch als einen Zwischenzustand zu einer möglichen *Grand Unified Theory* (GUT) ansehen. Die ursprüngliche Motivation war die Erklärung der Paritätsverletzung. Dies erfordert jedoch eine zusätzliche diskrete Links-Rechts-Symmetrie. Modelle mit dieser Annahme werden als Links-Rechts-symmetrische Modelle bezeichnet und zeichnen sich durch einige Vereinfachungen gegenüber dem allgemeinen Fall aus. So gilt z. B. $g_L = g_R$ (Kopplungskonstanten der entsprechenden $SU(2)$ -Gruppen) sowie Vereinfachungen im Yukawa-Sektor [38]. Diese Modelle führen zu vernünftigen Resultaten,

⁶Es existiert noch ein 2HDM III, welches FCNC auf dem Born-Niveau zuläßt. Es soll hier keine Rolle spielen.

wenn man sie als alleinige Verallgemeinerung des SM ansieht. Sie ergeben jedoch drastische Schwierigkeiten, sobald sie in GUT's eingebettet werden. Deshalb geht man von dieser diskreten Symmetrie ab bzw. betrachtet sie als gebrochen.

Die Symmetriebrechung hin zur $SU(3)_C \times U(1)_Q$ kann man sich wie folgt vorstellen [39]:

$$\begin{array}{cccc}
 SU(3)_C & \times & SU(2)_L & \times & SU(2)_R & \times & U(1) \\
 \mathbf{T}^a & & \mathbf{T}_L^i & & \mathbf{T}_R^i & & S \\
 g_3 & & g_L & & g_R & & g_1 \\
 & & & & \downarrow & & \\
 SU(3)_C & \times & SU(2)_L & \times & & & U(1)_Y \\
 \mathbf{T}^a & & \mathbf{T}_L^i & & & & Y = 2(T_R^3 + S) \\
 g_3 & & g_L & & & & g' \\
 & & & & \downarrow & & \\
 SU(3)_C & \times & & & & & U(1)_Q \\
 \mathbf{T}^a & & & & & & Q = T_L^3 + T_R^3 + S \quad . \\
 g_3 & & & & & & e
 \end{array}$$

Der Teilcheninhalt vor der Symmetriebrechung besteht aus links- und rechtshändigen Dubletts bzgl. der $SU(2)$:

$$\begin{aligned}
 q'_L &= \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}_L, & q'_R &= \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}_R, \\
 l'_L &= \begin{pmatrix} \nu' \\ e' \end{pmatrix}_L, & l'_R &= \begin{pmatrix} \nu' \\ e' \end{pmatrix}_R,
 \end{aligned} \tag{70}$$

wobei die Striche andeuten, daß in der Wechselwirkungsbasis gearbeitet wird. Um den Fermionen mittels der Yukawa-Wechselwirkung eine Masse zu geben, muß ein skalares *Bi-Dublett* eingeführt werden:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1^0 & \Phi_1^+ \\ \Phi_2^- & \Phi_2^0 \end{pmatrix} . \tag{71}$$

Es muß sich hierbei um ein Bi-Dublett handeln, da sich das Objekt unter beiden $SU(2)$ -Gruppen als Dublett transformieren soll. Das Bi-Dublett erhält einen Vakuumerwartungswert:

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k' \end{pmatrix} , \tag{72}$$

mit den komplexen Zahlen k und k' . Die Struktur von $\langle \Phi \rangle$ ist durch die notwendige $U(1)$ -Invarianz gegeben. Durch die mögliche Existenz eines von einem komplexen, matrixartigen Vakuumerwartungswertes ist eine weitere potentielle Quelle für die CP-Verletzung gegeben.

Um die Symmetrie zur phänomenologisch wichtigen Struktur $SU(3)_C \times U(1)_Q$ zu brechen, werden weitere Higgs-Multipletts benötigt [39]:

$$\chi_L = \begin{pmatrix} \chi_L^+ \\ \chi_L^0 \end{pmatrix} \quad , \quad \chi_R = \begin{pmatrix} \chi_R^+ \\ \chi_R^0 \end{pmatrix} \quad . \quad (73)$$

Diese erhalten die folgenden Vakuumerwartungswerte [39]:

$$\langle \chi_L \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_L \end{pmatrix} \quad , \quad \langle \chi_R \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_R \end{pmatrix} \quad . \quad (74)$$

Das linkshändige Dublett ist im allgemeinen nicht notwendig, außer, man fordert explizit die Links-Rechts-Symmetrie. Neben dieser Art der Symmetriebrechung kann man alternative Methoden betrachten (z. B. Higgs-Tripletts).

Diese hier besprochenen Modelle beinhalten einige neue Freiheitsgrade. So entsteht eine zweite CKM-Matrix für den rechtshändigen Sektor. Desweiteren erfordert die Erweiterung der Eichgruppe die Postulierung von zwei neuen geladenen Eichteilchen W_R^\pm und einem neutralen Z' . Durch die Symmetriebrechung kommt es zu einer Mischung der geladenen links- und rechtshändigen W -Bosonen [39]:

$$M_{W^\pm}^2 = \begin{pmatrix} \frac{g_L^2}{2} (v_L^2 + |k|^2 + |k'|^2) & -g_L g_R k^* k' \\ -g_L g_R k k'^* & \frac{g_R^2}{2} (v_R^2 + |k|^2 + |k'|^2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} M_L^2 & M_{LR}^2 e^{i\alpha} \\ M_{LR}^2 e^{-i\alpha} & M_R^2 \end{pmatrix} . \quad (75)$$

Aus dieser Matrix resultieren die folgenden Masseneigenwerte:

$$M_1^2 = \frac{M_L^2 + M_R^2}{2} + \frac{M_{LR}^2}{\sin(2\xi)} = M_L^2 \cos^2 \xi + M_R^2 \sin^2 \xi + M_{LR}^2 \sin(2\xi) \quad , \quad (76)$$

$$M_2^2 = \frac{M_L^2 + M_R^2}{2} - \frac{M_{LR}^2}{\sin(2\xi)} = M_L^2 \sin^2 \xi + M_R^2 \cos^2 \xi - M_{LR}^2 \sin(2\xi) \quad (77)$$

und Masseneigenzustände:

$$W_1^\pm = \cos \xi W_L^\pm + e^{-i\alpha} \sin \xi W_R^\pm \quad , \quad (78)$$

$$W_2^\pm = -\sin \xi W_L^\pm + e^{-i\alpha} \cos \xi W_R^\pm \quad . \quad (79)$$

Der in den letzten Gleichungen aufgetretene Mischungswinkel ξ ist wie folgt definiert:

$$\tan(2\xi) = \frac{2 M_{LR}^2}{M_L^2 - M_R^2} \quad . \quad (80)$$

Das Boson W_1 wird am Tevatron und bei LEP2 direkt produziert und geht für $\xi \rightarrow 0$ in das SM W -Boson über [30]. Die phänomenologischen Grenzen fordern, daß der Mischungswinkel sehr klein ist, so daß das W_1 hauptsächlich linkshändig ist und in guter Näherung mit dem SM W -Boson übereinstimmt. Weiterhin muß das W_2 sehr schwer sein [38, 39, 40]. Die in der Mischungsmatrix (75) auftretende komplexe Phase ist wiederum potentielle Quelle für CP-Verletzung.

Die für den Zerfall $b \rightarrow s\gamma$ relevante Lagrange-Dichte enthält die Kopplungen der $W_{1/2}$ -Bosonen und die zugehörigen would-be-Goldstone-Boson $\pi_{1/2}$ (Feynman-'t Hooft-Eichung) an die Quarks [39]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q} \left\{ \gamma^\mu W_{1\mu}^+ \left[-g_L \cos \xi V_L P_L - g_R \sin \xi e^{i\alpha} V_R P_R \right] \right. \\
& + \gamma^\mu W_{2\mu}^+ \left[g_L \sin \xi V_L P_L - g_R \cos \xi e^{i\alpha} V_R P_R \right] \\
& + \frac{\pi_1^+}{M_1} \left[\left(g_L \cos \xi V_L M_D - g_R \sin \xi e^{i\alpha} V_R M_U \right) P_R \right. \\
& \quad \left. - \left(g_L \cos \xi V_L M_U - g_R \sin \xi e^{i\alpha} V_R M_D \right) P_L \right] \\
& + \frac{\pi_2^+}{M_2} \left[- \left(g_L \sin \xi V_L M_D + g_R \cos \xi e^{i\alpha} V_R M_U \right) P_R \right. \\
& \quad \left. + \left(g_L \sin \xi V_L M_U + g_R \cos \xi e^{i\alpha} V_R M_D \right) P_L \right] \Big\} q + \text{h.c.} \quad . \quad (81)
\end{aligned}$$

Die Familienindizes wurden unterdrückt, V_L und V_R stellen die links- und rechtshändige CKM-Matrix dar, M_U und M_D bezeichnen die diagonalen Massenmatrizen der up- und down-Quarks. In Links-Rechts-symmetrischen Modellen gilt die zusätzliche Forderung $|V_L| = |V_R|$.

2.3.3 Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell

Die Supersymmetrie ist eine mathematisch sehr komplizierte Theorie. Es existieren viele sehr gute Reviews über dieses Gebiet [41, 42]. An dieser Stelle kann nur Platz für eine kurze Aufzählung der Grundeigenschaften und Ideen sein. Es wird sich vor allem auf das phänomenologisch wichtige Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM) beschränkt.

Bei dem gegenwärtigen experimentellen Hintergrund erscheint es schwierig, abgesehen von philosophischen und ästhetischen Fragestellungen, Erweiterungen des SM, insbesondere die Supersymmetrie, zu motivieren. Trotzdem ist die Supersymmetrie eine faszinierende Theorie.

Das Konzept der „Symmetrie“ war stets sehr erfolgreich in der Physik. Im stetigen Glauben an eine symmetrische Welt erscheint die Einführung einer neuen Symmetrie zwischen zwei völlig verschiedenen Statistiken, der Bose-Einstein-Statistik und der Fermi-Dirac-Statistik, als eine nahezu natürliche Erweiterung. Man muß sich jedoch vor Augen führen, daß einige Probleme gelöst werden, aber unzählige hinzukommen. Das wohl größte Problem ist, daß es zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht die geringste experimentelle Evidenz für die Supersymmetrie gibt.

Ein wichtiger theoretischer Grund, der für diese Theorie spricht, ist die Erklärung sehr unterschiedlicher Skalen. Da das Higgs-Boson mit allen massiven Teilchen mittels der Yukawa-Kopplung wechselwirkt, bekommt es starke quantenmechanische Korrekturen von insbesondere sehr schweren Teilchen der Theorie (z. B. dem W_R im Links-Rechts-symmetrischen Modell). Die Higgs-Masse kann jedoch nicht beliebig schwer sein, da sie mit der elektroschwachen Symmetriebrechung korreliert ist. Die Supersymmetrie schützt die Higgs-Masse, da zu jedem Fermionen-Loop ein bosonischer mit umgekehrten Vorzeichen existiert und somit kritische Beiträge, insbesondere die quadratischen Divergenzen, aufgehoben werden.

Die Supersymmetrie verbindet Fermionen mit Bosonen:

$$\hat{Q}|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle \quad , \quad \hat{Q}|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \quad , \quad (82)$$

wobei \hat{Q} ein antikommutierender Spinor sein muß, da ein Statistikwechsel erfolgt. Die mögliche Form für derartige Symmetrien ist durch das Haag-Lopuszanski-Sohnius Theorem [43], einer Erweiterung des Coleman-Mandula Theorems [44], stark eingeschränkt. Die Algebra muß insbesondere für Theorien mit chiralen Fermionen die folgende schematische Gestalt besitzen:

$$\begin{aligned} \{\hat{Q}, \hat{Q}^+\} &= P^\mu \quad , \\ \{\hat{Q}, \hat{Q}\} &= \{\hat{Q}^+, \hat{Q}^+\} = 0 \quad , \\ [P^\mu, \hat{Q}] &= [P^\mu, \hat{Q}^+] = 0 \quad , \end{aligned} \quad (83)$$

welche neben den für Lie-Algebren üblichen Kommutationsrelationen auch Antikommutatoren enthält und deshalb *Super-Lie-Algebra* genannt wird. Die erste Relation verknüpft supersymmetrische Transformationen mit einer Raum-Zeit-Translation in nichttrivialer Weise. Diese sehr überraschende Eigenschaft der Supersymmetrie ermöglicht die Verbindung zur Gravitationstheorie. Allerdings muß dazu eine lokale Supersymmetrie verlangt werden. Die Betrachtung dieses interessanten Phänomens würde über die hier präsentierte einfache Einführung weit hinaus gehen.

Entsprechend der Anzahl der N linear unabhängigen Operatoren \hat{Q} charakterisiert man die Theorie. Das MSSM ist eine $N = 1$ Supersymmetrie.

Die Teilchen werden in *Supermultipletts* angeordnet (siehe dazu auch Kapitel 2.2), wobei ein Supermultiplett Teilchen mit unterschiedlichem Spin inkorporiert. Teilchen eines Supermultipletts werden als *Superpartner* bezeichnet. Sie sind massenentartet, da der (Massen)²-Operator P^2 mit \hat{Q} vertauscht. Weiterhin gilt, daß die Operatoren \hat{Q} mit den Generatoren der Eichgruppen vertauschen, so daß die Superpartner bis auf den Spin dieselben Quantenzahlen besitzen. Die Zahl der fermionischen und bosonischen Freiheitsgrade im Supermultiplett sind identisch. Beispiele für die einfachsten möglichen Supermultipletts sind das *chirale Multiplett*⁷, bestehend aus einem Spin-1/2-Weyl Fermion und zwei reellen Skalaren, sowie das *Vektor-Multiplett*, bestehend aus einem masselosen Vektor-Teilchen und einem Spin-1/2-Weyl Fermion. Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgehen, daß die Anzahl der bosonischen und fermionischen Freiheitsgrade identisch ist. An dieser Stelle ist eine wichtige Feststellung hinsichtlich der Einordnung

⁷In diesem Kapitel werden Multiplett und Supermultiplett synonym verwendet.

der bekannten SM-Teilchen zu machen. Die Superpartner müssen identische Eigenschaften unter der Eichtransformation besitzen. Damit müssen die Fermionen im Vektormultiplett sich ebenfalls unter der adjungierten Darstellung transformieren. Diese hat jedoch die Eigenschaft, ihre eigene konjugierte Darstellung zu sein, demzufolge müssen sich links- und rechtshändige Fermionen identisch transformieren. Dies ist im SM nicht der Fall, weshalb die bekannten Fermion nur im chiralen Multiplett eingeordnet werden können. Die Einordnung der Bosonen ist eindeutig.

Die Namen der Spin-Null Superpartner erhalten ein „s“ für „skalar“ vor ihren Namen⁸ (Selektron: \tilde{e}_L, \tilde{e}_R). Die Spin-1/2-Superpartner der Vektorbosonen erhalten einen Appendix „ino“ (gluino: \tilde{g}).

Das skalare Higgs-Boson wird in das chirale Multiplett eingeordnet. Es zeigt sich, daß für die Konstruktion einer anomaliefreien Supersymmetrie mindestens zwei derartige Supermultipletts nötig sind [41]. Desweiteren werden zwei Multipletts benötigt, um für alle Teilchen eine Masse zu generieren.

Die Materie- und Eichfelder des MSSM ($N = 1$ -Theorie, jedem bosonischen Freiheitsgrad wird genau ein fermionischer Freiheitsgrad zugeordnet und umgekehrt) vor der elektroschwachen Symmetrie-Brechung sind in den Tabellen 1 und 2 angeordnet.

Namen	Superfeld	Spin 0	Spin 1/2
Squarks, Quarks ($\times 3$ Familien)	Q	$(\tilde{u}_L, \tilde{d}_L)$	(u_L, d_L)
	U	\tilde{u}_R	u_R
	D	\tilde{d}_R	d_R
Sleptons, Leptons ($\times 3$ Familien)	L	$(\tilde{\nu}, \tilde{e}_L)$	(ν, e_L)
	E	\tilde{e}_R	e_R
Higgs, Higgsino	H_1	(h_1^1, h_1^2)	$(\tilde{h}_1^1, \tilde{h}_1^2)$
	H_2	(h_2^1, h_2^2)	$(\tilde{h}_2^1, \tilde{h}_2^2)$

Tabelle 1: Materiefelder des MSSM. Man beachte, daß vor der elektroschwachen Symmetriebrechung die Symbole ν und e nichts mit dem Neutrino und Elektron zu tun haben. Um jedoch die Zahl der Symbole nicht übermäßig anwachsen zu lassen, werden dieselben Bezeichnungen wie nach der Symmetriebrechung benutzt.

Die elektroschwache Symmetriebrechung führt zu einer Mischung von Teilchen mit gleichen Quantenzahlen im elektroschwachen Sektor (siehe dazu auch Kapitel 2.1). Das Bino, das neutrale Wino sowie die neutralen Higgsinos mischen zu den Neutralinos $\tilde{\chi}^0$. Die geladenen Winos und Higgsinos mischen zu den Charginos $\tilde{\chi}^\pm$. Die konkrete Mischung ist modellabhängig. Eine

⁸Die Subskripte L und R an den Namen der skalaren Teilchen sind nur Symbole und haben nichts mit Chiralität zu tun.

Namen	Spin 1/2	Spin 1
Winos, schwaches Isospin-Eichfeld	\tilde{W}^i	W_μ^i
Bino, schwaches Hyperladungs-Eichfeld	\tilde{B}	X_μ
Gluinos, Gluonen	\tilde{g}^a	g_μ^a

Tabelle 2: Die Eichfelder des MSSM vor der elektroschwachen Symmetriebrechung.

weitere hier wichtige Mischung findet im Quarksektor statt. Die Gluonen und ihre Superpartner bleiben selbstverständlich ungemischt.

Ein offensichtliches Problem der Supersymmetrie ist, daß noch kein Superpartner gefunden wurde, obwohl z. B. \tilde{e}_L und \tilde{e}_R eine Masse exakt m_e haben müßten. Deshalb ist festzustellen, daß die Supersymmetrie gebrochen ist! Im Gegensatz zur elektroschwachen Symmetriebrechung gibt es noch kein etabliertes mathematisches Verfahren zur Supersymmetriebrechung. Diese Unwissenheit [45] wird deshalb durch das Hinzufügen explizit symmetriebrechender Terme parametrisiert. Nach wie vor soll das Hierarchie-Problem gelöst bleiben, man spricht deshalb von einer weichen Brechung. Die Lagrange-Dichte hat dann symbolisch die Gestalt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SUSY}} + \mathcal{L}_{\text{SOFT}} \quad . \quad (84)$$

Bevor über das MSSM diskutiert werden soll, ist es angezeigt, sich noch einmal mit dem einfachsten supersymmetrischen Modell zu befassen. Das *masselose Wess-Zumino-Modell* [41] besteht aus einem Weyl-Fermion ψ mit dem Spin 1/2 und einem komplexen skalaren Feld ϕ :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Skalar}} + \mathcal{L}_{\text{Fermion}} = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \quad , \quad (85)$$

wobei die Notation im Anhang C aufgelistet ist. Die Supersymmetrie-Transformation überführt ein Boson in ein Fermion und umgekehrt. Die einfachste Möglichkeit hat infinitesimal die folgende Gestalt:

$$\delta_S \phi = \varepsilon \psi \quad , \quad \delta_S \phi^* = \varepsilon^\dagger \psi^\dagger \quad , \quad (86)$$

mit dem konstanten, antikommutierenden, 2-komponentigen Weyl-Spinor ε (globale Supersymmetrie, parametrisiert durch ε). Folglich gilt:

$$\delta_S \mathcal{L}_{\text{Skalar}} = -\varepsilon \partial^\mu \psi \partial_\mu \phi^* - \varepsilon^\dagger \partial^\mu \psi^\dagger \partial_\mu \phi \quad , \quad (87)$$

was mit:

$$\delta_S (\mathcal{L}_{\text{Skalar}} + \mathcal{L}_{\text{Fermion}}) = 0 \quad (88)$$

zu der folgenden Forderung für δ_S angewendet auf Spinoren führt:

$$\delta_S \psi_\alpha = i(\sigma^\mu \varepsilon^+)_{\alpha} \partial_\mu \phi \quad , \quad \delta_S \psi_\alpha^+ = -i(\varepsilon \sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^* \quad . \quad (89)$$

Damit ist die explizite Form für den transformierten fermionischen Teil gefunden:

$$\begin{aligned} \delta_S \mathcal{L}_{\text{Fermion}} &= -\varepsilon \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \partial_\nu \psi \partial_\mu \phi^* + \psi^+ \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \varepsilon^+ \partial_\mu \partial_\nu \phi \\ &= \varepsilon \partial^\mu \psi \partial_\mu \phi^* + \varepsilon^+ \partial^\mu \psi^+ \partial_\mu \phi + \text{totales Differential} \quad , \end{aligned} \quad (90)$$

welcher bis auf ein totales Differential in der Tat mit $-\delta_S \mathcal{L}_{\text{Skalar}}$ übereinstimmt. Es wurden die Identitäten (488) und (489) aus dem Anhang C benutzt. Im nächsten Schritt muß gezeigt werden, daß sich die Superalgebra schließt, d. h. daß die Hintereinanderausführung zweier Transformationen nicht aus der Menge herausführt. Dazu benutzt man die Supertransformationen (86) und die Gleichungen (89), welche zu folgenden Resultaten führen [41]:

$$(\delta_S^{\varepsilon_2} \delta_S^{\varepsilon_1} - \delta_S^{\varepsilon_1} \delta_S^{\varepsilon_2}) \phi = i(\varepsilon_1 \sigma^\mu \varepsilon_2^+ - \varepsilon_2 \sigma^\mu \varepsilon_1^+) \partial_\mu \phi \quad , \quad (91)$$

$$(\delta_S^{\varepsilon_2} \delta_S^{\varepsilon_1} - \delta_S^{\varepsilon_1} \delta_S^{\varepsilon_2}) \psi_\alpha = i(\sigma^\mu \varepsilon_1^+)_{\alpha} \varepsilon_2 \partial_\mu \psi - i(\sigma^\mu \varepsilon_2^+)_{\alpha} \varepsilon_1 \partial_\mu \psi \quad . \quad (92)$$

Die letztgenannte Gleichung läßt sich unter Anwendung der folgenden Identität für Spinoren [41]:

$$\chi_\alpha (\xi \eta) = -\xi_\alpha (\eta \chi) - \eta_\alpha (\chi \xi) \quad (93)$$

umformen zu:

$$\begin{aligned} (\delta_S^{\varepsilon_2} \delta_S^{\varepsilon_1} - \delta_S^{\varepsilon_1} \delta_S^{\varepsilon_2}) \psi_\alpha &= i(\varepsilon_1 \sigma^\mu \varepsilon_2^+ - \varepsilon_2 \sigma^\mu \varepsilon_1^+) \partial_\mu \psi_\alpha \\ &\quad - i\varepsilon_{1\alpha} \varepsilon_2^+ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + i\varepsilon_{2\alpha} \varepsilon_1^+ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \quad . \end{aligned} \quad (94)$$

Der letzte Summand verschwindet bei Anwendung der Bewegungsgleichung (on-shell) und der Kommutator zweier Supertransformationen stimmt für das skalare und fermionische Feld überein und ist proportional dem Generator der Raum-Zeit-Translation. Nun ist es wünschenswert, daß die Supertransformationen auch im quantenmechanischen Sinn gelten, d. h. off-shell. Dies wird durch einen formalen Trick erreicht. Es wird ein neues skalares Feld eingeführt, welches keinen kinetischen Term besitzt und somit keinen dynamischen Freiheitsgrad der Theorie darstellt. Dieses künstliche Feld (auxiliary field) F besitzt die folgende Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}_{\text{auxiliary}} = F^* F \quad . \quad (95)$$

Das Feld transformiert sich unter der Supersymmetrie-Transformation per Konstruktion derart, daß die Supertransformation für alle Teilchen des chiralen Multipletts (ϕ, ψ, F) identisch zu

Gleichung (91) ist.

Zum Beweis des Abschlusses der Superalgebra wurden Kommutatoren betrachtet, im Gegensatz zu den für Q und Q^+ in Gleichung (83) geforderten Antikommutatoren. Das ist kein Widerspruch, denn durch die Einführung des spinoriellen Parameters ε läßt sich die Algebra komplett durch Kommutatoren beschreiben. Die Poincaré-Supergruppe besitzt 14 Generatoren (P^μ , $M^{\mu\nu}$, Q , Q^+) [46]. Ein Element der Gruppe (Lorentz-Drehungen seien ausgeschlossen) besitzt die Form:

$$A(a_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1^+) = \exp[i(-a_1^\mu P_\mu + \varepsilon_1 Q + \varepsilon_1^+ Q^+)] \quad , \quad (96)$$

und somit gilt für infinitesimale Transformationen unter Ausnutzung der schematischen Form der Superalgebra (83):

$$\begin{aligned} [A(a_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1^+), A^+(a_2, \varepsilon_2, \varepsilon_2^+)] &= [\varepsilon_1 Q + \varepsilon_1^+ Q^+, \varepsilon_2 Q + \varepsilon_2^+ Q^+] \\ &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \{Q, Q\} - \varepsilon_1 \varepsilon_2^+ \{Q, Q^+\} \\ &\quad - \varepsilon_1^+ \varepsilon_2 \{Q^+, Q\} - \varepsilon_1^+ \varepsilon_2^+ \{Q^+, Q^+\} \\ &= -(\varepsilon_1 \varepsilon_2^+ + \varepsilon_1^+ \varepsilon_2) \{Q^+, Q\} \sim P^\mu \quad . \end{aligned} \quad (97)$$

Im Rückblick gibt es ein plausibles Argument für die Einführung des Hilfsfeldes. Das komplexe, skalare Feld besitzt on- und off-shell 2 Freiheitsgrade. Der Weyl-Spinor besitzt jedoch off-shell 2 Freiheitsgrade mehr, welche durch das Hilfsfeld kompensiert werden. Es gilt somit auch off-shell für ein Supermultiplett: Die Anzahl der bosonischen Freiheitsgrade ist identisch der Anzahl der fermionischen Freiheitsgrade.

In einem realistischen Modell gibt es mehrere chirale Multipletts, welche sowohl Eichwechselwirkungen als auch Nicht-Eichwechselwirkungen (Yukawa-Wechselwirkungen) eingehen. Entsprechend der bisherigen Diskussion kann man schreiben:

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i - i \psi^{+i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + F^{*i} F_i \quad , \quad (98)$$

wobei der Index i und im folgenden auch j die Multipletts durchnummerieren soll. Für die Wechselwirkung der chiralen Multipletts untereinander wird der folgende allgemeine Ansatz gemacht:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{2} W^{ij} \psi_i \psi_j + W^i F_i + \text{h.c.} \quad . \quad (99)$$

Die freien Funktionen W^{ij} und W^i hängen nur von den skalaren Feldern ϕ_i ab, da die Abhängigkeit von F_i bzw. ψ_i zu Massendimensionen größer als 4 führen oder keinen Lorentz-Skalar ergeben würde. Ebenso darf \mathcal{L}_{int} keine Terme enthalten, die nur von den skalaren Feldern ϕ_i abhängen, da diese Terme nicht invariant unter einer Supertransformation wären. Für \mathcal{L}_{int} muß separat gelten:

$$\delta_S \mathcal{L}_{\text{int}} = 0 \quad . \quad (100)$$

Nach einigen nichttrivialen Rechnungen [41] ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$W^{ij} = \frac{\delta^2}{\delta \phi_i \delta \phi_j} W \quad , \quad (101)$$

$$W^i = \frac{\delta}{\delta \phi_i} W \quad (102)$$

mit dem *Superpotential*:

$$W = \frac{1}{2} M^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} Y^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \quad , \quad (103)$$

wobei der 1. Summand einen Massenterm und der 2. Summand einen Yukawa-Term darstellen. Die Konstanten M^{ij} und Y^{ijk} sind symmetrisch unter Austausch der Indizes und müssen experimentell bestimmt werden. Betrachtet man für $\mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$ die klassische Bewegungsgleichung für das Hilfsfeld, die sich aus dem Term $F_i F^{*i} + W^i F_i + W_i^* F^{*i}$ ergibt:

$$F_i = -W_i^* \quad , \quad F^{*i} = -W^i \quad , \quad (104)$$

dann kann das Hilfsfeld eliminiert werden und für \mathcal{L} folgt:

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi^i - i \psi^{+i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \frac{1}{2} \left(W^{ij} \psi_i \psi_j + W^{*ij} \psi_i^+ \psi_j^+ \right) - W^i W_i^* \quad . \quad (105)$$

Erweitert man diese Betrachtungen auf das Vektormultiplett mit

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - i \lambda^{+a} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D_a \quad (106)$$

und fordert für diese Terme lokale Eichinvarianz ($\partial_\mu \rightarrow D_\mu$), dann erhält man die Eichwechselwirkung zwischen Vektormultiplett und chiralem Multiplett. Auch im Falle des Vektormultipletts muß ein Hilfsfeld $D^a = (D^a)^*$ eingeführt werden, um zu garantieren, daß die Theorie unter der Supersymmetrietransformation quantenmechanisch (off-shell) invariant ist. Im einfachsten Fall muß das Vektormultiplett ein Spin-1/2-Weyl-Fermion λ und ein Vektorfeld A^a mit der Feldstärke $F_{\mu\nu}^a$ enthalten.

Diese hier präsentierten sehr knappen und bei weitem nicht vollständigen Betrachtungen sollen zeigen, wie kompliziert die Konstruktion einer supersymmetrischen Quantenfeldtheorie bereits im einfachsten Fall ist. Die leitenden Prinzipien sind jedoch wie immer: Eichinvarianz und Renormierbarkeit, allerdings nun noch mit der zusätzlichen Forderung nach einer globalen Invarianz unter der Supersymmetrietransformation.

Es soll nun zum viel komplizierterem MSSM und damit zum Teilcheninhalt aus den Tabellen 1 und 2 zurückgekehrt werden. Es gibt sehr viele unterschiedliche Konventionen und Notationen.

In dieser Arbeit wird das Papier [47, 48] zugrunde gelegt. Das Superpotential hat die folgende Gestalt [41, 47, 49]⁹:

$$W = \mu H_1 H_2 + Y_{ij}^U Q_i H_2 U_j + Y_{ij}^D Q_i H_1 D_j + Y_{ij}^E L_i H_1 E_j \quad , \quad (107)$$

wobei die Matrizen $Y^{U,D,E}$ die jeweiligen Yukawa-Kopplungen parametrisieren. Die supersymmetrische Lagrange-Dichte kann mit Hilfe des Superpotentials in die folgende schematische Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SUSY}} = & -\frac{1}{4} F_G^{A,\mu\nu} F_{G,\mu\nu}^A + \bar{\lambda}_G^A i \not{D}_{AB} \lambda_G^B + (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) + \bar{\psi} i \not{D} \psi \\ & - \left[\left(\frac{\delta W}{\delta \Phi_i} \right)^* \left(\frac{\delta W}{\delta \Phi_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta \Phi_i \delta \Phi_j} \psi_i^T C \psi_j + \text{h.c.} \right) \right]_{\Phi \rightarrow \phi} \\ & - \sqrt{2} g_G [\phi^\dagger \mathbf{T}_G^A \lambda_G^A C \psi + \text{h.c.}] - \frac{1}{2} g_G^2 (\phi^\dagger \mathbf{T}_G^A \phi) (\phi^\dagger \mathbf{T}_G^A \phi) \quad . \end{aligned} \quad (108)$$

Der Index G steht stellvertretend für die Quantenzahlen der SM-Eichgruppen: Farbe, schwacher Isospin und schwache Hyperladung. Die Buchstaben A und B indizieren die adjungierten Darstellungen der nicht-abelschen Untergruppen des SM. Die skalaren Teilchen wurden mit ϕ abgekürzt, während die Materie-Fermionen und die Superpartner der Vektorbosonen mit ψ bzw. λ bezeichnet wurden.

Wie bereits angesprochen, muß die Supersymmetrie auf niedrigen Energieskalen gebrochen sein. Die Unwissenheit über den konkreten Brechungsmechanismus parametrisiert man mittels explizit symmetriebrechender Terme:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SOFT}} = & -\frac{1}{2} [m_{\tilde{g}} \tilde{g}^a C \tilde{g}^a + m_{\tilde{W}} \tilde{W}^{iT} C \tilde{W}^i + m_{\tilde{B}} \tilde{B}^T C \tilde{B} + \text{h.c.}] - m_1^2 h_1^\dagger h_1 - m_2^2 h_2^\dagger h_2 \\ & - \tilde{q}_i^\dagger (M_{\tilde{q}}^2)_{ij} \tilde{q}_j - \tilde{u}_i^{c\dagger} (M_{\tilde{u}^c}^2)_{ij} \tilde{u}_j^c - \tilde{d}_i^{c\dagger} (M_{\tilde{d}^c}^2)_{ij} \tilde{d}_j^c - \tilde{l}_i^\dagger (M_{\tilde{l}}^2)_{ij} \tilde{l}_j - \tilde{e}_i^{c\dagger} (M_{\tilde{e}^c}^2)_{ij} \tilde{e}_j^c \\ & + [A_{ij}^U \tilde{q}_i \tilde{u}_j^c h_2 + A_{ij}^D \tilde{q}_i \tilde{d}_j^c h_1 + A_{ij}^E \tilde{l}_i \tilde{e}_j^c h_1 + B \mu h_1 h_2 + \text{h.c.}] \quad . \end{aligned} \quad (109)$$

Man beachte, daß die Brechung der Supersymmetrie vor der elektroschwachen Symmetriebrechung stattfindet, so daß zwangsläufig in der letzten Gleichung Winos \tilde{W} und Binos \tilde{B} auftreten. Die elektroschwache Symmetriebrechung erfolgt in einer anomaliefreien Supersymmetrie durch zwei Higgs-Doublets (2HDM II). Die Brechung der elektroschwachen Symmetrie hat eine Mischung der MSSM-Felder zur Folge. Die Masseneigenzustände sind mit den Wechselwirkungseigenzuständen durch unitäre Transformationen verknüpft :

⁹Die Yukawa-Terme sind Bestandteil des Superpotentials. Die Yukawa-Wechselwirkungsterme sind durch die Forderung nach Invarianz unter Supersymmetrie wesentlich stärker in ihrer Form eingeschränkt als im SM. Dies ist u. a. ein Grund für die Notwendigkeit der Existenz mindestens zweier Higgs-Doublets

$$\begin{aligned}
u' &= S^{U_L} u + S^{U_R} C \overline{u^c}^T, & \tilde{u}' &= \Gamma^U \begin{pmatrix} S^{U_L} \tilde{u} \\ S^{U_R} \tilde{u}^c{}^* \end{pmatrix}, \\
d' &= S^{D_L} d - S^{D_R} C \overline{d^c}^T, & \tilde{d}' &= \Gamma^D \begin{pmatrix} S^{D_L} \tilde{d} \\ -S^{D_R} \tilde{d}^c{}^* \end{pmatrix}, \\
\nu' &= S^{N_L} \nu, & \tilde{\nu}' &= \Gamma^N S^{E_L} \tilde{\nu}, \\
e' &= S^{E_L} e - S^{E_R} C \overline{e^c}^T, & \tilde{e}' &= \Gamma^E \begin{pmatrix} S^{E_L} \tilde{e} \\ -S^{E_R} \tilde{e}^c{}^* \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die 3×3 Massenmatrizen der Quarks und Leptonen haben die folgende Gestalt:

$$M_U = \frac{\eta \sin \beta}{\sqrt{2}} S^{U_R} (Y^U)^T (S^{U_L})^\dagger, \quad (110)$$

$$M_D = \frac{\eta \cos \beta}{\sqrt{2}} S^{D_R} (Y^D)^T (S^{D_L})^\dagger, \quad (111)$$

$$M_E = \frac{\eta \cos \beta}{\sqrt{2}} S^{E_R} (Y^E)^T (S^{E_L})^\dagger. \quad (112)$$

Die 6×6 Massenmatrizen der entsprechenden Superpartner sind wesentlich komplizierter und hängen von vielen Parametern ab:

$$\begin{aligned}
&(\Gamma^U)^{-1} M_u^2 (\Gamma^{U\dagger})^{-1} = \\
&\begin{pmatrix} S^{U_L} M_q^2 S^{U_L\dagger} + M_U^2 + \frac{M_Z^2}{6} (3 - 4 \sin^2 \Theta_W) \cos 2\beta & \mu M_U \cot \beta - \frac{\eta \sin \beta}{\sqrt{2}} S^{U_L} A^{U*} S^{U_R\dagger} \\ \mu^* M_U \cot \beta - \frac{\eta \sin \beta}{\sqrt{2}} S^{U_R} A^U S^{U_L\dagger} & S^{U_R} M_u^2 S^{U_R\dagger} + M_U^2 + \frac{2M_Z^2}{3} \sin^2 \Theta_W \cos 2\beta \end{pmatrix}, \\
&\hspace{15cm} (113)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\Gamma^D)^{-1} M_d^2 (\Gamma^{D\dagger})^{-1} = \\
&\begin{pmatrix} S^{D_L} M_q^2 S^{D_L\dagger} + M_D^2 - \frac{M_Z^2}{6} (3 - 2 \sin^2 \Theta_W) \cos 2\beta & \mu M_D \tan \beta - \frac{\eta \cos \beta}{\sqrt{2}} S^{D_L} A^{D*} S^{D_R\dagger} \\ \mu^* M_D \tan \beta - \frac{\eta \cos \beta}{\sqrt{2}} S^{D_R} A^D S^{D_L\dagger} & S^{D_R} M_d^2 S^{D_R\dagger} + M_D^2 - \frac{M_Z^2}{3} \sin^2 \Theta_W \cos 2\beta \end{pmatrix}, \\
&\hspace{15cm} (114)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\Gamma^E)^{-1} M_e^2 (\Gamma^{E\dagger})^{-1} = \\
&\begin{pmatrix} S^{E_L} M_l^2 S^{E_L\dagger} + M_E^2 - \frac{M_Z^2}{2} (1 - 2 \sin^2 \Theta_W) \cos 2\beta & \mu M_E \tan \beta - \frac{\eta \cos \beta}{\sqrt{2}} S^{E_L} A^{E*} S^{E_R\dagger} \\ \mu^* M_E \tan \beta - \frac{\eta \cos \beta}{\sqrt{2}} S^{E_R} A^E S^{E_L\dagger} & S^{E_R} M_e^2 S^{E_R\dagger} + M_E^2 - M_Z^2 \sin^2 \Theta_W \cos 2\beta \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$(115)$$

$$M_{\tilde{\nu}}^2 = \Gamma^N \left(S^{E_L} M_{\tilde{l}}^2 S^{E_L \dagger} + \frac{M_Z^2}{2} \cos 2\beta \right) \Gamma^{N\dagger}. \quad (116)$$

Die bereits angesprochene Mischung im Sektor der Gauginos hat hier explizit das folgende Aussehen für die Charginos:

$$\tilde{\chi}^- = U \begin{pmatrix} \tilde{W}^- \\ \tilde{h}_1^- \end{pmatrix} + V^* C \begin{pmatrix} \overline{\tilde{W}^+}^T \\ \overline{\tilde{h}_2^+}^T \end{pmatrix}, \quad (117)$$

sowie für die Neutralinos:

$$\tilde{\chi}^0 = N \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ \tilde{W}_3 \\ \tilde{h}_1^0 \\ \tilde{h}_2^0 \end{pmatrix} + N^* C \begin{pmatrix} \overline{\tilde{B}}^T \\ \overline{\tilde{W}_3}^T \\ \overline{\tilde{h}_1^0}^T \\ \overline{\tilde{h}_2^0}^T \end{pmatrix}. \quad (118)$$

Die unitären Matrizen U, V und N diagonalisieren dabei die Massenmatrizen der Charginos :

$$M_{\tilde{\chi}^\pm} = U^* \begin{pmatrix} m_{\tilde{W}} & \sqrt{2} M_W \sin \beta \\ \sqrt{2} M_W \cos \beta & -\mu \end{pmatrix} V^\dagger \quad (119)$$

und der Neutralinos

$$(N^*)^{-1} M_{\tilde{\chi}^0} (N^\dagger)^{-1} = \begin{pmatrix} m_{\tilde{B}} & 0 & -M_Z \sin \Theta_W \cos \beta & M_Z \sin \Theta_W \sin \beta \\ 0 & m_{\tilde{W}} & M_Z \cos \Theta_W \cos \beta & -M_Z \cos \Theta_W \sin \beta \\ -M_Z \sin \Theta_W \cos \beta & M_Z \cos \Theta_W \cos \beta & 0 & \mu \\ M_Z \sin \Theta_W \sin \beta & -M_Z \cos \Theta_W \sin \beta & \mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Nachdem die Diagonalisierung der Massenmatrizen abgeschlossen und somit nun alles mit Masseneigenzuständen beschrieben ist, erhält man für den hier wichtigen Teil der Lagrange-Funktion, welcher die Kopplung von Quarks, Squarks mit Gluinos, Charginos und Neutralinos beschreibt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\tilde{g}, \tilde{\chi}} &= \sum_{i=1}^2 \tilde{\chi}_i^- \tilde{u}^\dagger (X_i^{U_L} P_L + X_i^{U_R} P_R) d + \sum_{i=1}^4 \tilde{\chi}_i^0 \tilde{d}^\dagger (Z_i^{D_L} P_L + Z_i^{D_R} P_R) d \\
&\quad - \sqrt{2} g_3 \sum_{a=1}^8 \tilde{g}^a \tilde{d}^\dagger (\Gamma^{D_L} P_L - \Gamma^{D_R} P_R) \mathbf{T}^a d + \text{h.c.} \quad ,
\end{aligned} \tag{121}$$

wobei sich für die Matrizen die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$X_i^{U_L} = g_2 \left[-V_{i1}^* \Gamma^{U_L} + V_{i2}^* \Gamma^{U_R} \frac{M_U}{\sqrt{2} M_W \sin \beta} \right] \mathbf{V}_{\text{CKM}} \quad , \tag{122}$$

$$X_i^{U_R} = g_2 \left[U_{i2} \Gamma^{U_L} \mathbf{V}_{\text{CKM}} \frac{M_D}{\sqrt{2} M_W \cos \beta} \right] \quad , \tag{123}$$

$$Z_i^{D_L} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[\left(-N_{i2}^* + \frac{1}{3} \tan \Theta_W N_{i1}^* \right) \Gamma^{D_L} + N_{i3}^* \Gamma^{D_R} \frac{M_D}{M_W \cos \beta} \right] \quad , \tag{124}$$

$$Z_i^{D_R} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[\frac{2}{3} \tan \Theta_W N_{i1} \Gamma^{D_R} + N_{i3} \Gamma^{D_L} \frac{M_D}{M_W \cos \beta} \right] \quad . \tag{125}$$

Die CKM-Matrix ergibt sich dabei als $\mathbf{V}_{\text{CKM}} \equiv S^{U_L} S^{D_L \dagger}$. Die Matrizen $\Gamma^{U_L}, \Gamma^{U_R}, \Gamma^{D_L}$ und Γ^{D_R} sind dabei die 6×3 Komponenten der Matrizen Γ^U bzw. Γ^D :

$$\Gamma_{6 \times 6}^U = \begin{pmatrix} \Gamma_{6 \times 3}^{U_L} & \Gamma_{6 \times 3}^{U_R} \end{pmatrix} \quad , \tag{126}$$

$$\Gamma_{6 \times 6}^D = \begin{pmatrix} \Gamma_{6 \times 3}^{D_L} & \Gamma_{6 \times 3}^{D_R} \end{pmatrix} \quad . \tag{127}$$

Die Wechselwirkung der Squarks untereinander wird durch den Term :

$$\mathcal{L}_{\tilde{u}, \tilde{d}} = g_3^2 P^a P^a \quad , \tag{128}$$

$$P^a = \tilde{u} \left[\Gamma^{U_L} \Gamma^{U_L \dagger} - \Gamma^{U_R} \Gamma^{U_R \dagger} \right] \tilde{u} \mathbf{T}^a + \tilde{d} \left[\Gamma^{D_L} \Gamma^{D_L \dagger} - \Gamma^{D_R} \Gamma^{D_R \dagger} \right] \tilde{d} \mathbf{T}^a \tag{129}$$

bestimmt.

2.4 Die Renormierung

In diesem Kapitel soll neben einer kurzen allgemeinen Erläuterung des Begriffs Renormierung vor allem die hier notwendige QCD-Renormierung und die Renormierungsgruppe vorgestellt werden [6, 22, 50, 51].

2.4.1 Eine kurze Einführung in die Renormierung

Um diesen Punkt möglichst kurz und überschaubar zu halten, wird sich auf die Φ^4 -Theorie beschränkt.

Sobald man die Born-Approximation verläßt, wird man in 1. Ordnung Störungstheorie mit dem linken Diagramm in Abbildung 6 und in 2. Ordnung mit dem rechten Diagramm im gleichen Bild konfrontiert.

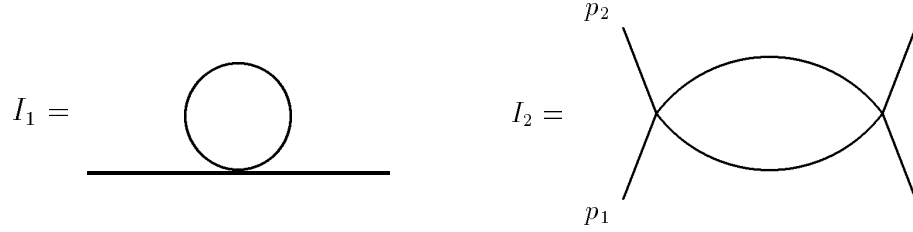


Abbildung 6: 1. und 2. Ordnung Störungstheorie in der Φ^4 -Theorie.

Das erste Diagramm ist quadratisch und das zweite ist logarithmisch divergent. Die Diagramme sind proportional zu den folgenden Integralen:

$$I_1 \sim g \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2} \quad , \quad (130)$$

$$I_2 \sim g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2)((p_1 + p_2 - q)^2 - m^2)} \quad . \quad (131)$$

Wie soll nun eine störungstheoretische Rechnung sinnvolle und eindeutige Resultate liefern, wenn bereits in der 1. Ordnung divergente Ausdrücke auftreten? Ein Ausweg aus dem Dilemma bietet die Renormierung. Um die Aufgabe der Renormierung expliziter und durchschaubarer zu halten, müssen die anstehenden Integrale zuerst regularisiert werden. Dieses Verfahren ist nicht eindeutig und erst die Symbiose mit der Renormierung führt zu eindeutigen Resultaten (auf existierende Probleme der Renormierungsschemaabhängigkeit soll hier nicht eingegangen werden). Es gibt verschiedene Regularisierungsverfahren, z. B. die Einführung eines harten Cut-off-Parameters (nicht lorentz-invariant), die Pauli-Villars-Regularisierung (verletzt Ward-Identitäten) und die dimensionale Regularisierung (problematisch beim Auftreten von γ_5). Die letztere Methode ist die eleganteste und wird in dieser Arbeit benutzt (siehe dazu Anhang E). Der erste Schritt bei der dimensionalen Regularisierung ist die analytische Fortsetzung der Lagrange-Dichte zu $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 - \frac{\mu^{2\varepsilon} g}{4!} \Phi^4 \quad . \quad (132)$$

Für die 2-Punkt-Greens-Funktion folgt mit Gleichung (536):

$$\begin{aligned}
\text{---}\bigcirc\text{---} &= \frac{1}{2} g \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 - m^2} \\
&= \frac{i g m^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \gamma_E + \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \ln(4\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \\
&= \frac{i g m^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{2\varepsilon} + \text{endlicher Term} \quad , \tag{133}
\end{aligned}$$

wobei der endliche Term im folgenden nicht interessieren soll.

Das soeben berechnete Diagramm entsteht durch die Selbstwechselwirkung des Φ -Feldes. Die Aufgabe ist es nun zu zeigen, daß die Wechselwirkung den Parameter m in \mathcal{L} ändert und daß letztlich die Unendlichkeit in m absorbiert werden kann.

Die 2-Punkt-Greens-Funktion im Ortsraum lautet:

$$\begin{aligned}
\tau(x_1, x_2) &= - \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = i \text{---} - \frac{g}{2} \text{---}\bigcirc\text{---} + \mathcal{O}(g^2) \\
&= i \Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{g}{2} \Delta_F(0) \int dz \Delta_F(z - x_1) \Delta_F(z - x_2) + \mathcal{O}(g^2) \quad , \tag{134}
\end{aligned}$$

wobei der Propagator des freien Teilchens wie folgt definiert ist:

$$\Delta_F(x - y) = \frac{i}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{e^{-i q (x-y)}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad .$$

Damit ergibt sich für $\tau(x_1, x_2)$:

$$\tau(x_1, x_2) = \frac{i}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{e^{-i q (x-y)}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{i g \Delta_F(0)}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \right] \quad , \tag{135}$$

was letztlich formal bis zu $\mathcal{O}(g^2)$ mittels der Umkehrung von: $(1 - x)^{-1} = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$ geschrieben werden kann als:

$$\tau(x_1, x_2) = \frac{i}{(2\pi)^D} \int d^D q \frac{e^{-i q (x-y)}}{q^2 - (m^2 + \frac{1}{2} i g \Delta_F(0)) + i\varepsilon} \quad . \tag{136}$$

Dieses Resultat läßt sich nun im obigen Sinn interpretieren: die Wechselwirkung proportional zu g hat den Parameter m verändert. Man kann dieses Ergebnis verallgemeinern. Dazu wird definiert:

$$\text{---}\bullet\text{---} \equiv \frac{1}{i} \Sigma = \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\!\!\!\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \dots \quad . \tag{137}$$

Für die vollständige, zusammenhängende 2-Punkt-Greens-Funktion läßt sich somit symbolisch schreiben:

$$\begin{aligned}
G_C^{(2)}(p) &= G_0(p) + G_0(p) \frac{\Sigma(p)}{i} G_0(p) + G_0(p) \frac{\Sigma(p)}{i} G_0(p) \frac{\Sigma(p)}{i} G_0(p) + \dots \\
&= G_0 \left(1 - \frac{\Sigma(p)}{i} G_0(p) \right)^{-1} = \left[\left(1 - \frac{\Sigma(p)}{i} G_0(p) \right) G_0^{-1} \right]^{-1} \\
&= \frac{i}{i G_0^{-1} - \Sigma} = \frac{i}{p^2 - (m^2 + \Sigma)} \quad , \tag{138}
\end{aligned}$$

mit dem freien Propagator $G_0(p)$ im Impulsraum. Dieses Ergebnis führt zu dem Schluß, daß $m_{\text{phys}}^2 = m^2 + \Sigma$ ist.

Diese nur sehr grobe Beschreibung sollte zeigen, daß die Parameter in der unrenormierten Lagrange-Dichte nicht die physikalischen Werte sind (es wurde aus Platzgründen nur für die Masse gezeigt).

Die Theorie der Renormierung ist mathematisch sehr anspruchsvoll [6]. Fragen nach der Eindeutigkeit physikalischer Größen, also der Unabhängigkeit von der Regularisierungs- und Renormierungsprozedur gehen weit über den hier gespannten Rahmen hinaus. Letztlich sollte nur gezeigt werden, daß die Renormierung nichts mystisches ist und zusammen mit dem in Kapitel 2.2 beschriebenen quantenphysikalischen Effekt der Vakuumabschirmung sich physikalisch aufdrängt.

Im weiteren sollen zwei äquivalente „Rezepte“ zur Renormierung vorgestellt werden. Im ersten wird angenommen, daß $G_C^{(2)}$ endlich ist, d. h., es wird ein neuer Parameter m_1 derart eingeführt, daß gilt: $i/G_C^{(2)} = p^2 - m_1^2$. Der neue Parameter m_1 repräsentiert die physikalische Masse. Der ursprüngliche Parameter m in \mathcal{L} wird als unendlich angenommen (besitzt somit keine physikalische Signifikanz). In der 1-loop-Approximation gilt dann:

$$m_1^2 = m^2 - \frac{m^2 g}{16 \pi^2 2\varepsilon} = m^2 \left(1 - \frac{g}{16 \pi^2 2\varepsilon} \right) \quad , \tag{139}$$

bzw. umgeschrieben:

$$m^2 = m_1^2 \left(1 + \frac{g}{16 \pi^2 2\varepsilon} \right) \equiv Z_m m_1^2 \quad . \tag{140}$$

In der üblichen Terminologie stellt m die unrenormierte und m_1 die renormierte Masse dar. Z_m ist die Renormierungskonstante, welche für die Massenrenormierung verantwortlich ist. Die Divergenz ist identisch mit der in Gleichung (133).

Das zweite sehr häufig benutzte Verfahren ist die Counter-Term-Methode. Hierbei geht man davon aus, daß in \mathcal{L} bereits die physikalischen Parameter stehen. Die dadurch auftretenden Divergenzen werden durch zusätzliche Terme, die Counter-Terme kompensiert. Addiert man zu der Lagrange-Dichte den Term:

$$\delta \mathcal{L}_1 = -\frac{g m^2}{32 \pi^2 2\varepsilon} \Phi^2 \quad , \tag{141}$$

so ergibt sich eine zusätzliche Feynman-Regel:

$$\text{---}\times\text{---} = -\frac{i g m^2}{16 \pi^2 2 \varepsilon} . \quad (142)$$

Mit dieser Regel folgt für den kompletten Propagator bis zur 1. Ordnung in g mit Gleichung (133) ein offensichtlich endlicher Ausdruck:

$$\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\times\text{---} + \mathcal{O}(g^2) . \quad (143)$$

Beide Verfahren sind äquivalent. Die unrenormierten Größen werden in beiden Fällen multiplikativ renormiert.

2.4.2 Die Renormierung der QCD

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Untersuchung von QCD-Korrekturen zu schwachen Prozessen. Deshalb soll im weiteren die hier ausschließlich zu gebrauchende QCD-Renormierung untersucht werden.

Nach der erfolgten dimensional Regularisierung erfolgt die Subtraktion der Divergenzen mittels dem $\overline{\text{MS}}$ -Schema (modified minimal subtraction scheme) [52]. Dazu werden im allgemeinen die folgenden Renormierungskonstanten Z_i benötigt:

$$\begin{aligned} A_{0\mu}^a &= Z_3^{1/2} A_\mu^a , & q_0 &= Z_q^{1/2} q , & \chi_0^a &= \tilde{Z}_3^{1/2} \chi^a , \\ g_{03} &= Z_g g_3 \mu^\varepsilon , & \xi_0 &= Z_3 \xi , & m_0 &= Z_m m . \end{aligned} \quad (144)$$

Da in allen hier betrachteten Fällen die Geist-Felder keine Rolle spielen, ist \tilde{Z}_3 irrelevant. Ebenso kann auf die Renormierung des Eichparameters verzichtet werden, da nur eichunabhängige Größen untersucht werden.

Die hier benutzte Counter-Term-Methode ergibt sich sehr einfach durch die Anwendung von (144). Die formal zusätzlich entstehenden Terme nennt man *Counter-Terme*, sie können als Wechselwirkungsterme aufgefaßt werden. Für den kinetischen Teil der Quarks sieht das wie folgt aus:

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}_0 i \not{\partial} q_0 - m_0 \bar{q}_0 q_0 \equiv \bar{q} i \not{\partial} q - m \bar{q} q + (Z_q - 1) \bar{q} i \not{\partial} q - (Z_q Z_m - 1) m \bar{q} q . \quad (145)$$

Der Vorteil dieser Methode ist, daß nur renormierte bzw. physikalische Größen eine Rolle spielen. Die Renormierungskonstanten werden dann so bestimmt, daß sie die Divergenzen beseitigen. Dabei gibt es eine gewisse Willkür, denn neben den Divergenzen können im allgemeinen auch endliche Terme abgezogen werden. Die Subtraktion der endlichen Teile hängt von dem gewählten Renormierungsschema ab. Im $\overline{\text{MS}}$ -Schema (minimal subtraction scheme) werden nur die Divergenzen ($1/\varepsilon$ -Pole) abgezogen. Das hat den Vorteil, daß die Renormierungskonstanten keine explizite Renormierungsskalen- und Massenabhängigkeit besitzen. Deshalb wird das

MS-Schema als massenunabhängiges Renormierungsschema bezeichnet. Eine beliebige Renormierungskonstante innerhalb der QCD hat damit folgendes Aussehen:

$$Z_i = 1 + \frac{\alpha_S(\mu)}{4\pi} \frac{a_i}{\varepsilon} + \left(\frac{\alpha_S(\mu)}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{b_i}{\varepsilon^2} + \frac{c_i}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\alpha_S^3) \quad , \quad (146)$$

wobei a_i , b_i und c_i unabhängig von der Skala μ sind. Mit Hilfe des MS-Schemas kann nun eine ganze Klasse von Subtraktionsschemata abgeleitet werden, die sich nur durch eine unterschiedliche Fortsetzung der Kopplungskonstante in D Dimensionen unterscheiden. Man kann schreiben:

$$g_{03} = Z_g g_3 (\mu f)^\varepsilon \quad , \quad (147)$$

wobei f eine beliebige Zahl ist. Im MS-Schema gilt $f = 1$ und im $\overline{\text{MS}}$ -Schema gilt:

$$f = e^{\gamma_E/2} (4\pi)^{-1/2} \quad . \quad (148)$$

Der Vorteil des $\overline{\text{MS}}$ -Schemas ist, daß neben dem $1/\varepsilon$ -Pol auch die für die dimensionale Regularisierung generischen Terme $(\ln 4\pi - \gamma_E)$ abgezogen werden. Das $\overline{\text{MS}}$ -Schema wird in dieser Arbeit extensiv benutzt. Alle derartig aus dem MS-Schema hergeleiteten Renormierungsschemata sind massenunabhängige Schemata.

2.4.3 Die Renormierungsgruppe

Die Abhängigkeit der renormierten Größen von der Renormierungsskala wird durch die Renormierungsgruppengleichung (RG) beschrieben. Im weiteren sollen einige Grundzüge der RG-Theorie am Beispiel der „laufenden Kopplungskonstanten“ erläutert werden. Im Kapitel über effektive Theorien wird dann für die Wilson-Koeffizienten gezeigt, wie man mit der RG eine Verbesserung der naiven Störungstheorie erreichen kann (renormierungsgruppen-verbesserte Störungstheorie).

Die RG-Theorie besagt, daß unrenormierte Größen nicht von der Renormierungsskala abhängen. Diese Aussage bedeutet für die Kopplungskonstante:

$$\frac{d}{d \ln \mu} g_{03} = \frac{d}{d \ln \mu} (Z_g g_3 \mu^\varepsilon) = 0 \quad , \quad (149)$$

woraus das folgende μ -Abhängigkeitsverhalten für die renormierte Kopplungskonstante abgeleitet wird:

$$\frac{d}{d \ln \mu} g_3 = -\varepsilon g_3 - g_3 \frac{1}{Z_g} \frac{dZ_g}{d \ln \mu} \equiv -\varepsilon g_3 + \beta(g_3) \quad . \quad (150)$$

In 4 Dimensionen beschreibt die wichtige QCD- β -Funktion das Skalierungsverhalten von g_3 . Im MS bzw. $\overline{\text{MS}}$ -Schema können die Renormierungskonstanten Z_i in der folgenden Form geschrieben werden:

$$Z_i = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^k} Z_{i,k}(g_3) \quad , \quad (151)$$

was bereits in Gleichung (146) und im Kapitel 2.4.1 angedeutet wurde (siehe Gleichung (140)). Da die β -Funktion sehr wichtig ist, soll noch eine wichtige und eindrucksvolle Beziehung abgeleitet werden. Dazu wird als Ausgangsgleichung:

$$\beta(g_3, \varepsilon) \equiv -\varepsilon g_3 - g_3 f(g_3) \quad (152)$$

herangezogen, wobei die Abkürzung $f(g_3)$ für den Ausdruck:

$$f(g_3) = \frac{\mu}{Z_g} \frac{d Z_g}{d \mu} \quad (153)$$

steht. Mit Hilfe der Entwicklung für die Renormierungskonstante (151) ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(g_3) \left(1 + \frac{Z_{g,1}}{\varepsilon} + \frac{Z_{g,2}}{\varepsilon^2} + \dots \right) &= \frac{d g_3^2}{d \ln \mu} \frac{d Z_g}{d g_3^2} \\ &= 2 g_3 \beta(g_3, \varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{d Z_{g,1}}{d g_3^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d Z_{g,2}}{d g_3^2} + \dots \right) . \end{aligned} \quad (154)$$

Nach dem Koeffizientenvergleich folgt aus der letzten Gleichung zusammen mit der Relation (152) für den nichtsingulären Teil:

$$f(g_3) = -2 g_3^2 \frac{d Z_{g,1}(g_3)}{d g_3^2} \quad (155)$$

bzw.

$$\beta(g_3) = 2 g_3^3 \frac{d Z_{g,1}(g_3)}{d g_3^2} . \quad (156)$$

Diese Gleichung beinhaltet nun aber den Schluß, daß die RG-Funktion $\beta(g_3)$ einzig aus den $1/\varepsilon$ -Teilen von Z_g berechnet werden kann und dieses Resultat zu allen Ordnungen in der Störungstheorie gilt. Weiterhin ergibt sich daraus die folgende Entwicklung für β in der QCD:

$$\beta(g_3) = -\beta_0 \frac{g_3^3}{16 \pi^2} - \beta_1 \frac{g_3^5}{(16 \pi^2)^2} , \quad (157)$$

wobei sich die Koeffizienten aus $Z_{g,1}$ ergeben. In den Reviews [10] werden sie wie folgt angegeben:

$$\beta_0 = \frac{11 n_C - 2 n_f}{3} , \quad \beta_1 = \frac{34}{3} n_C^2 - \frac{10}{3} n_C n_f - 2 C_F n_f , \quad (158)$$

mit $C_F = (n_C^2 - 1)/(2 n_C)$ und $n_C = 3 =$ Zahl der Farben, $n_f =$ Anzahl der aktiven Flavor. Mit der Definition $\alpha_S = g_3^2/(4 \pi)$ läßt sich die Gleichung (157) umschreiben in eine nichtlineare Differentialgleichung 1.Ordnung für α_S :

$$\frac{d \alpha_S}{d \ln \mu} = -2 \beta_0 \frac{\alpha_S^2}{4 \pi} - 2 \beta_1 \frac{\alpha_S^3}{(4 \pi)^2} - \dots , \quad (159)$$

deren Lösung in niedrigster Ordnung angegeben werden kann zu:

$$\alpha_S(\mu) = \frac{\alpha_S(\mu_0)}{1 + \frac{\alpha_S(\mu_0)}{4\pi} \beta_0 \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} \quad . \quad (160)$$

Mit der Definition für Λ aus Gleichung (61) wird die letzte Gleichung wie folgt umgeschrieben:

$$\alpha_S(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \quad . \quad (161)$$

Eine Lösung, die auch α_S^3 -Terme in Gleichung (159) einschließt, findet man in [10]:

$$\alpha_S(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln \ln(\mu^2/\Lambda^2)}{\ln(\mu^2/\Lambda^2)} \right] \quad . \quad (162)$$

Mit dieser Gleichung schließt sich der Kreis, denn über diese wurde bereits im Kapitel 2.2 diskutiert, dort allerdings nur bis zur Leading-Order.

2.4.4 Probleme mit der Matrix γ_5 in D Dimensionen

In 4 Dimensionen ist die Matrix γ_5 mittels

$$\gamma_5 = -\frac{i}{4!} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad , \quad (163)$$

definiert, wobei für den Permutationstensor (Levi-Civita Symbol) gilt: $\varepsilon_{0123} = -1$. Damit ergeben sich für γ_5 die folgenden Beziehungen:

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1} \quad , \quad \gamma_5^+ = \gamma_5 \quad , \quad \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \quad . \quad (164)$$

Da der Rang eines Tensors nicht von der Dimension abhängen sollte, ist der Permutationstensor ein 4-dimensionales Objekt und γ_5 mit der Definition (163) nicht nach D Dimensionen fortsetzbar. Dieser Sachverhalt ist für die dimensionale Regularisierung problematisch.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dieses Problem zu behandeln, von denen 3 kurz aufgezählt werden sollen. Die erste Rechenmethode ist die *naive dimensionale Regularisierung* (NDR). Sie wird am häufigsten benutzt. Es wird ein D -dimensionaler metrischer Tensor eingeführt, für den gilt:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad , \quad g_\mu^\mu = D \quad , \quad g_{\mu\rho} g_\nu^\rho = g_{\mu\nu} \quad , \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad . \quad (165)$$

Die Matrix γ_5 soll nun mit γ_μ antikommutieren:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad , \quad (166)$$

was zu algebraischen Inkonsistenzen führt [53]. Eine notwendige Bedingung dafür, daß das NDR-Schema richtige Resultate liefert, scheint zu sein, daß man Spuren der folgenden Art $\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_5]$ in der Rechnung vermeidet [10]. In der Tat, mit obigen Regeln weiß man nicht, wie man damit umgehen sollte. Buras und Weisz haben in einer großen Anzahl von Rechnungen gezeigt, daß das NDR-Schema bei Vermeidung der direkten Berechnung von $\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_5]$ zu korrekten Resultaten führt [8]. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, daß es infolge seiner Einfachheit gut auf Rechnern implementiert werden kann.

Das zweite Verfahren, die *dimensionale Reduktion* (DRED) wurde von Siegel [54] zur Renormierung supersymmetrischer Theorien entwickelt. Hierbei werden die Dirac-Matrizen in 4 Dimensionen behandelt und für die Kontraktion mit dem D-dimensionalen metrischen Tensor aus den divergenten Integralen soll gelten:

$$\tilde{g}_{\mu\rho} g_\nu^\rho = g_{\mu\nu} \quad , \quad (167)$$

wobei $\tilde{g}_{\mu\rho}$ ein 4-dimensionales Objekt ist und $g_{\mu\nu}$ ein D-dimensionales. Auch dieses Verfahren besitzt aufgrund der letzten Relation Inkonsistenzen, die in [55] diskutiert wurden. Das DRED-Schema hat sich noch nicht etablieren können. Der Vorteil dieses Schemas ist allerdings, daß man die Dirac-Algebra in 4 Dimensionen ausführen kann.

Das letzte hier aufzuführende und bis heute einzige konsistente Schema ist das 't Hooft-Veltman Schema [56]. Es läßt sich sehr schwierig auf dem Computer umsetzen. Aufgrund seiner Konsistenz [53] darf dies jedoch nicht stören. Neben einem D- und 4-dimensionalen metrischen Tensor g und \tilde{g} wird zusätzlich ein 2ε -dimensionaler Tensor \hat{g} eingeführt. Die Regeln sind wie folgt:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad , \quad g_\mu^\mu = D \quad , \quad g_{\mu\rho} g_\nu^\rho = g_{\mu\nu} \quad , \quad (168)$$

und analog für \tilde{g} und \hat{g} . Weiter gilt:

$$\tilde{g}_{\mu\rho} g_\nu^\rho = \tilde{g}_{\mu\nu} \quad , \quad \hat{g}_{\mu\rho} g_\nu^\rho = \hat{g}_{\mu\nu} \quad , \quad \hat{g}_{\mu\rho} \hat{g}_\nu^\rho = 0 \quad . \quad (169)$$

Die Dirac-Matrizen werden in einen 4-dimensionalen und einen 2ε -dimensionalen Anteil aufgespalten:

$$\gamma^\mu = \tilde{\gamma}_\mu + \hat{\gamma}_\mu \quad , \quad (170)$$

für die gelten soll:

$$\{\gamma_5, \tilde{\gamma}_\nu\} = 0 \quad , \quad \{\gamma_5, \hat{\gamma}_\nu\} = 0 \quad , \quad \gamma_5^2 = \mathbf{1} \quad . \quad (171)$$

Da in dieser Arbeit Spuren über Dirac-Matrizen keine Rolle spielen, wird auf das einfache NDR-Schema zurückgegriffen.

2.5 Effektive Theorien

In diesem Kapitel werden Begriffe und Methoden vorgestellt, die notwendig sind, um elektroschwache Prozesse im Rahmen einer effektiven Theorie zu beschreiben.

Die Hadronen (z. B. B -Mesonen) werden durch die starke Wechselwirkung zusammengehalten. Die für diese Arbeit typische hadronische Energieskala ist von der Ordnung 1 GeV. Der schwache Zerfall bzw. das Mixing von Hadronen wird durch die typische elektroschwache Skala von ca. 80-90 GeV beschrieben. Dieser gewaltige Skalenunterschied ermöglicht die Konstruktion einer effektiven Theorie, wobei das Werkzeug die *Operatorproduktentwicklung* (OPE) [5] ist. Auf diesem Gebiet ist vor allem von der Arbeitsgruppe um Andrzej J. Buras (TU München) Wegweisendes geleistet worden. Der neueste Übersichtsartikel von A. J. Buras (siehe [10]) ist sehr pädagogisch und umfassend, so daß sich diese Arbeit im wesentlichen daran orientiert.

2.5.1 Die Operatorproduktentwicklung

Ziel der OPE ist die saubere Trennung eines Prozesses in lang- und kurzreichweitige bzw. in nieder- und hochenergetische Anteile¹⁰. Das Matrixelement des effektiven Hamilton-Operators \mathcal{H}_{eff} eines schwachen Prozesses $i \rightarrow o$ kann wie folgt geschrieben werden:

$$\mathcal{A} = \langle o | \mathcal{H}_{\text{eff}} | i \rangle = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \mathbf{V}_{\text{CKM}} \sum_k C_k \langle o | \hat{O}_k | i \rangle \quad , \quad (172)$$

wobei \mathbf{V}_{CKM} stellvertretend für alle am Prozeß beteiligten CKM-Matrixelemente steht. Die Wilson-Koeffizienten C_k enthalten alle kurzreichweitigen Beiträge und \hat{O}_k repräsentieren die am Prozeß beteiligten lokalen Operatoren. Die Matrixelemente der Operatoren beschreiben die langreichweitigen Anteile.

Einige Aspekte der OPE sollen an dem sehr einfachen Beispiel $c \rightarrow s u \bar{d}$ in niedrigster Ordnung der Störungstheorie verdeutlicht werden. Es wird im Free-Quark-Modell gerechnet, d. h. hadronische Korrekturen sollen im weiteren nicht interessieren. Die Amplitude für das linke Diagramm in Abbildung 7 hat die Form:

$$\mathcal{A}_{\text{voll}} = -4 \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} \frac{M_W^2}{k^2 - M_W^2} [\bar{s} \gamma_\mu L c] [\bar{u} \gamma_L^\mu d] \quad . \quad (173)$$

Da der Impulsübertrag k sehr klein ist, verglichen mit der Masse des W -Bosons, können Terme der Ordnung k^2/M_W^2 in der Regel sicher vernachlässigt werden. Man erhält somit:

$$\mathcal{A}_{\text{eff}} = 4 \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} [\bar{s} \gamma_\mu L c] [\bar{u} \gamma_L^\mu d] + \mathcal{O}(k^2/M_W^2) \equiv \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} C_1 \langle \hat{O}_1 \rangle_{\text{tree}} \quad (174)$$

bzw.

¹⁰Der genaue quantitative Zahlenwert der Separationsskala ist prozessabhängig und für ein allgemeines Verständnis des hier beschriebenen Verfahrens nicht notwendig. Natürlich wird er innerhalb der durchzuführenden Rechnungen spezifiziert. Die Separationsskala wird hier immer so gewählt, daß im hochenergetischen Bereich störungstheoretisch gerechnet werden kann.

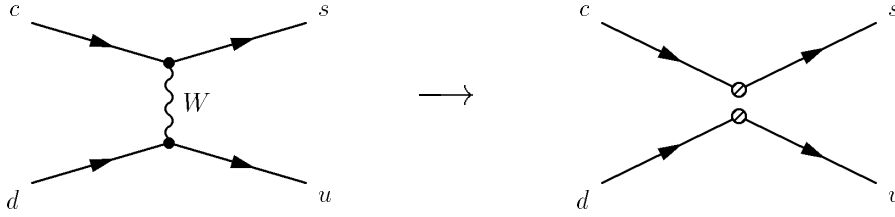


Abbildung 7: Übergang von der vollen Theorie zur effektiven Theorie durch Ausintegration der schweren Freiheitsgrade (hier W -Boson). Ein klassisches Beispiel ist Fermi's 4-Quark-Theorie.

$$\langle \hat{O}_1 \rangle_{\text{tree}} = [\bar{s} \gamma_\mu L c] [\bar{u} \gamma_L^\mu d] \quad , \quad (175)$$

$$C_1 = 4 \quad . \quad (176)$$

Der Index „tree“ soll anzeigen, daß das rechte Diagramm in Abbildung 7 ein Tree-Level-Diagramm repräsentiert. Alle höher dimensional Operatoren, welche von äußeren Impulsen abhängen, wurden vernachlässigt. Die Entwicklung der zwei nichtlokalen Fermi-Ströme nach lokalen Operatoren (hier ein 4-Quark-Operator der Dimension 6) ist die Grundidee der OPE. Mit Hilfe des Pfadintegralformalismus hat man einen formalen, mathematischen Apparat in der Hand, der obiges Vorgehen rechtfertigt. Die Methode der Pfadintegrale wird jedoch bei späteren Rechnungen nicht mehr praktiziert, da die Resultate mit der einfacheren diagrammatischen Behandlung exakt übereinstimmen. Der Pfadintegralformalismus gibt jedoch einige tiefere Einsichten, die an dem hier präsentierten einfachen Beispiel vorgeführt werden sollen. Der relevante Teil des generierenden Funktional hat das folgende Aussehen:

$$Z_W \sim \int \mathcal{D}W^+ \mathcal{D}W^- \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_W \right] \quad (177)$$

mit der Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W = & -\frac{1}{2}(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)(\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu}) + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \\ & + \frac{g_2}{\sqrt{2}}(J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}) \quad . \end{aligned} \quad (178)$$

Die geladenen Ströme sind durch J_μ^\pm symbolisiert. Das generierende Funktional kann umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} Z_W \sim & \int \mathcal{D}W^+ \mathcal{D}W^- \exp \left[i \int d^4x d^4y W_\mu^+(x) K^{\mu\nu}(x, y) W_\nu^-(y) \right. \\ & \left. + i \frac{g_2}{\sqrt{2}} \int d^4x (J_\mu^+ W^{+\mu} + J_\mu^- W^{-\mu}) \right] \quad , \end{aligned} \quad (179)$$

wobei der Operator $K_{\mu\nu}(x, y)$ gegeben ist zu:

$$K_{\mu\nu}(x, y) = \delta^{(4)}(x - y) [g_{\mu\nu}(\partial^2 + M_W^2) - \partial_\mu \partial_\nu] \quad . \quad (180)$$

Setzt man $K_{\mu\nu}$ ohne den M_W^2 -Term in die Gleichung (179) ein:

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y W_\mu^+(x) \delta^{(4)}(x - y) [g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu] W_\nu^-(y) \\ &= \int d^4x [W_\mu^+(x) \partial^2 W^{+\mu}(x) - W_\mu^+(x) \partial^\mu \partial^\nu W_\nu^-(x)] \\ &= \int d^4x [-(\partial_\nu W_\mu^+)(\partial^\nu W^{-\mu}) + (\partial_\nu W_\mu^+)(\partial^\mu W^{-\nu}) + \text{totales Differential}] \quad , \end{aligned}$$

so findet man Übereinstimmung mit den relevanten Termen in Gleichung (178). Im weiteren wird (179) auf Gauß-Form gebracht:

$$\begin{aligned} Z_W &\sim \int \mathcal{D}W^+ \mathcal{D}W^- \\ &\exp \left[i \int d^4x d^4y \left\{ W_\mu^+(x) + \frac{g_2}{\sqrt{2}} J^{-\omega}(x) \Delta_{\omega\mu} \right\} K^{\mu\nu} \left\{ W_\nu^-(y) + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \Delta_{\nu\omega} J^{+\omega}(y) \right\} \right. \\ &\quad \left. - i \frac{g_2^2}{2} \int d^4x d^4y J_\mu^-(x) \Delta^{\mu\nu}(x, y) J_\nu^-(y) \right] \quad , \end{aligned} \quad (181)$$

wobei $\Delta^{\mu\nu}(x, y)$ der inverse Operator zu $K^{\mu\nu}(x, y)$ ist. Es gilt:

$$\int d^4y K_{\mu\nu}(x, y) \Delta^{\nu\lambda}(y, z) = g_\mu^\lambda \delta^{(4)}(x - z) \quad (182)$$

mit:

$$\Delta_{\mu\nu}(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \underbrace{\left[\frac{-1}{k^2 - M_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2} \right) \right]}_{\text{W-Propagator in unitärer Eichung}} e^{-ik(x-y)} \quad . \quad (183)$$

Diese Aussage soll im weiteren kurz bewiesen werden:

$$\begin{aligned} & \int d^4y \delta^{(4)}(x - y) [g_{\mu\nu}(\partial^2 + M_W^2) - \partial_\mu \partial_\nu] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{-1}{k^2 - M_W^2} \left(g^{\nu\lambda} - \frac{k^\nu k^\lambda}{M_W^2} \right) \right] e^{-ik(y-z)} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [g_{\mu\nu}(\partial^2 + M_W^2) - \partial_\mu \partial_\nu] \left[\frac{-1}{k^2 - M_W^2} \left(g^{\nu\lambda} - \frac{k^\nu k^\lambda}{M_W^2} \right) \right] e^{-ik(x-z)} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{-1}{k^2 - M_W^2} \left(g^{\nu\lambda} - \frac{k^\nu k^\lambda}{M_W^2} \right) \right] [g_{\mu\nu}(-k^2 + M_W^2) + k_\mu k_\nu] e^{-ik(x-z)} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[g_\mu^\lambda - \frac{k_\mu k^\lambda}{k^2 - M_W^2} - \frac{k_\mu k^\lambda}{M_W^2} + \frac{k^2 k_\mu k^\lambda}{M_W^2(k^2 - M_W^2)} \right] e^{-ik(x-z)} \\ &= g_\mu^\lambda \delta^{(4)}(x - z) \quad . \end{aligned}$$

Das W -Boson-Feld kann nun ausintegriert werden. Es bleibt das folgende nichtlokale Wirkungsintegral für Quarks übrig:

$$S_{\text{nonlocal}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{kin}} - \frac{g_2^2}{2} \int d^4x d^4y J_\mu^-(x) \Delta^{\mu\nu}(x, y) J_\nu^+(y) \quad . \quad (184)$$

Nun wird der zweite nichtlokale Term nach $1/M_W^2$ entwickelt, wobei sich eine unendliche Reihe lokaler Terme ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(x, y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2} + \frac{(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)}{M_W^4} + \dots \right] e^{-ik(x-y)} \\ &= \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2} \delta^{(4)}(x-y) - \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^4} \frac{\partial^2}{\partial(x-y)^2} \delta^{(4)}(x-y) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (185)$$

Dieses Ergebnis in S_{nonlocal} eingesetzt, ergibt einzelne Summanden von offensichtlich lokaler Struktur. Hierbei ist ein Term exakt dann lokal, wenn dessen Träger identisch Null ist.

Bei Berücksichtigung des 1. Summanden in Gleichung (185), der den größten Beitrag liefert, ergibt sich:

$$S_{\text{local}}^{\text{eff}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{kin}} - \frac{g_2^2}{2M_W^2} \int d^4x J_\mu^-(x) J^{+\mu}(x) \quad , \quad (186)$$

woraus sich dieselbe Amplitude wie in Gleichung (174) ableiten läßt.

Zusammenfassend kann gesagt werden:

- aufgrund der großen Masse des W -Bosons verglichen mit den hier angenommenen kleinen äußeren Impulsen kann das Produkt der lokalen Operatoren $J_\mu^+(x)$ und $J_\mu^-(y)$ in zusammengesetzte lokale Operatoren entwickelt werden,
- höher dimensionale Operatoren sind unterdrückt mit k^2/M_W^4 ,
- die komplette Entwicklung nach $1/M_W^2$ repräsentiert die volle Theorie, das Abschneiden ergibt die effektive Theorie,
- das W -Boson (im allgemeinen alle Freiheitsgrade mit Massen oberhalb einer Skala μ) wurde als dynamischer Freiheitsgrad aus der Theorie entfernt.

Aus den bisherigen Betrachtungen konnte die Trennung zwischen lang- und kurzreichweitigen Anteilen noch nicht herausgearbeitet werden, da der Prozeß nur kurzreichweitige Beiträge (im Free-Quark-Modell) lieferte.

Im folgenden wird das Beispiel durch die Berücksichtigung von QCD-Korrekturen erweitert. Aufgrund der asymptotischen Freiheit der QCD kann man bei hohen Energien (hard gluons) sicher mit störungstheoretischen Methoden arbeiten. Da die QCD im Gegensatz zur schwachen Wechselwirkung sowohl lang- als auch kurzreichweitige Beiträge enthält, ist die OPE das

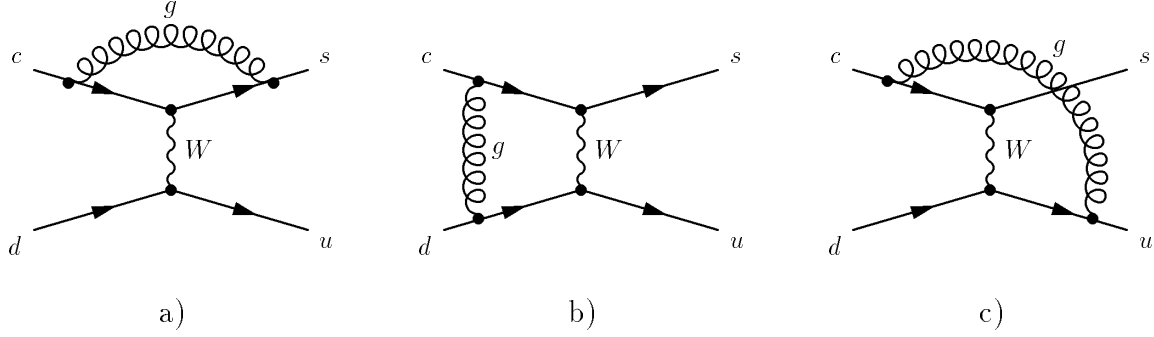


Abbildung 8: QCD- Korrekturen zum Prozeß $c \rightarrow s u \bar{d}$. Die symmetrischen Diagramme sind zusätzlich noch zu berücksichtigen.

adäquate Instrument, um beide Bereiche zu trennen. Innerhalb der nun präsentierten erweiterten Betrachtung wird diese Trennungsprozedur sichtbar.

Die nun zu betrachtenden Diagramme sind in Abbildung 8 dargestellt.

Durch die explizite Berücksichtigung der QCD-Korrekturen muß die effektive Hamilton-Funktion verallgemeinert werden zu:

$$\mathcal{A}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} \left(C_1 \langle \hat{O}_1 \rangle_{\text{tree}} + C_2 \langle \hat{O}_2 \rangle_{\text{tree}} \right) \quad (187)$$

mit

$$\langle \hat{O}_1 \rangle_{\text{tree}} = [\bar{s}_\alpha \gamma_\mu L c_\beta] [\bar{u}_\beta \gamma_L^\mu d_\alpha] \quad , \quad (188)$$

$$\langle \hat{O}_2 \rangle_{\text{tree}} = [\bar{s}_\alpha \gamma_\mu L c_\alpha] [\bar{u}_\beta \gamma_L^\mu d_\beta] \quad . \quad (189)$$

Die Matrixelemente der Operatoren unterscheiden sich in ihrer Farbstruktur (indiziert durch die Farbindizes α und β), besitzen jedoch denselben Flavor-Inhalt. Wird die QCD vernachlässigt, so ergibt sich sofort (174). Durch das Auftreten von lang- und kurzreichweitigen Anteilen wird die Rechnung etwas komplizierter. Der erste Schritt besteht aus der Berechnung der in Abbildung 8 dargestellten Diagramme mittels der Standard-Störungstheorie. Dabei werden die Massen der Quarks identisch Null gesetzt und die äußeren Impulse berücksichtigt (aus Gründen der Einfachheit alle identisch p). Es wird im Laufe dieser Arbeit am Beispiel der $B\bar{B}$ -Oszillation gezeigt, daß die Art und Weise der Behandlung der äußeren Zustände keinen Einfluß auf die Bestimmung der Wilson-Koeffizienten (kurzreichweites Verhalten) hat. Um sich im weiteren auf das Wesentliche zu konzentrieren, werden nur divergente und $\alpha_S \cdot \log$ -Beiträge explizit angegeben. Alle weiteren Terme sind für die Next-to-Leading-Log-Approximation notwendig und sollen deshalb hier nicht interessieren. Für das $B\bar{B}$ -Mixing und die Zerfälle $b \rightarrow s \gamma$, $b \rightarrow s g$ werden diese α_S -Korrekturen im späteren Verlauf berechnet.

In der Reihenfolge von Abbildung 8 ergibt sich für die Diagramme:

$$D_{(a)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} 4 C_F \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{-p^2} + F_1 \right) \langle \hat{O}_2 \rangle_{\text{tree}} , \quad (190)$$

$$D_{(b)} + D_{(c)} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} 4 \left[\frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\ln \frac{M_W^2}{-p^2} + F_2 \right) \frac{3}{6} \langle \hat{O}_2 \rangle_{\text{tree}} - \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\ln \frac{M_W^2}{-p^2} + F_3 \right) \frac{3}{2} \langle \hat{O}_1 \rangle_{\text{tree}} \right] . \quad (191)$$

Der $1/\varepsilon$ -Pol kann durch die Quarkfeld-Renormierung subtrahiert werden. Somit ergibt sich für die Amplitude auf der vollen Seite unter Berücksichtigung der Doppelzählung der Diagramme:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{voll}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} 4 \left[\left(1 + 2 C_F \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\ln \frac{\mu^2}{-p^2} + F_1 \right) \right) \langle \hat{O}_2 \rangle_{\text{tree}} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\ln \frac{M_W^2}{-p^2} + F_2 \right) \langle \hat{O}_2 \rangle_{\text{tree}} - 3 \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\ln \frac{M_W^2}{-p^2} + F_3 \right) \langle \hat{O}_1 \rangle_{\text{tree}} \right] . \quad (192) \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Farbstruktur wurde die Gleichung (499) aus dem Anhang D benutzt, wobei speziell gilt: $\mathbf{T}_{ij}^a \mathbf{T}_{jl}^a = 4/3 \delta_{il} = C_F \delta_{il}$. Die endlichen Terme werden durch die Funktionen F_i symbolisiert.

Die Wilson-Koeffizienten werden nun durch die folgende Forderung bestimmt:

$$\mathcal{A}_{\text{voll}} = \mathcal{A}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{ud} (C_1 \langle \hat{O}_1 \rangle + C_2 \langle \hat{O}_2 \rangle) . \quad (193)$$

Dieses Gleichsetzen der vollen und der effektiven Seite nennt man *Matching-Prozedur*.

Damit muß der nächste Schritt darin bestehen, die Matrixelemente der Operatoren $\langle \hat{O}_i \rangle$ bis zu einer festgelegten Ordnung der Störungstheorie zu berechnen. Dies erfolgt durch die Einsetzung der Operatoren \hat{O}_i in die Diagramme in Abbildung 9. Der allgemeine Sprachgebrauch lautet hierbei: man berechnet sogenannte *Operatoreinsetzungen*. Die Tree-Level-Matrixelemente $\langle \hat{O}_i \rangle_{\text{tree}}$ sind in den Gleichungen (188) und (189) definiert. Häufig wird in diesem Zusammenhang der Kürze wegen nur vom Operator \hat{O}_i gesprochen. Die Wilson'sche OPE konvergiert jedoch nur im Sinne des schwachen Limes, so daß die Bildung von Matrixelementen immer notwendig ist. Die Größen $\langle \hat{O}_i \rangle$ werden durch die Diagramme in Abbildung 9 definiert, wobei die dicken Punkte die Einsetzung $\langle \hat{O}_j \rangle_{\text{tree}}$ repräsentieren. Alle in diesen Diagrammen umlaufenden Teilchen sind leicht und auch in der effektiven Theorie dynamische Freiheitsgrade¹¹.

Für die unrenormierten Matrixelemente gilt:

¹¹Es ist bekannt, daß die Free-Quark-Approximation eine Näherung ist und daß man die hadronischen und somit langreichweitigen Korrekturen mittels nichtstörungstheoretischer Betrachtungen einbeziehen muß. Am Ende der Rechnung muß die vollständige Amplitude z. B. für das $B\bar{B}$ -Mixing das Matrixelement $\langle \bar{B} | \hat{O}_i | B \rangle$ enthalten, welches durch den B-Parameter und die Mesonen-Zerfallskonstante parametrisiert wird. Da dies jedoch nur Beiträge zum langreichweitigen Verhalten darstellt, spielt es für die Wilson-Koeffizienten keine Rolle und wird deshalb in diesem Einführungskapitel nicht berücksichtigt.

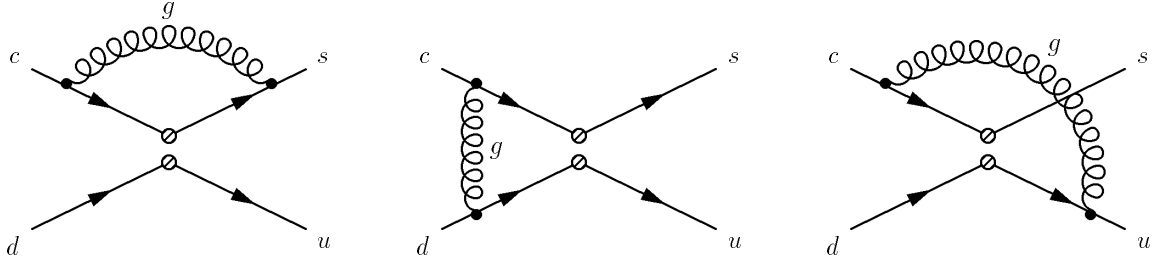


Abbildung 9: Operatoreinsetzungsdiagramme zur Bestimmung der unrenormierten Matrixelemente $\langle \hat{O}_i \rangle^{(0)}$.

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}_{1/2} \rangle^{(0)} &= \left(1 + 2 C_F \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{-p^2} + G_1 \right) \right) \langle \hat{O}_{1/2} \rangle_{\text{tree}} + \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{-p^2} + G_2 \right) \langle \hat{O}_{1/2} \rangle_{\text{tree}} \\ &\quad - 3 \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{-p^2} + G_3 \right) \langle \hat{O}_{2/1} \rangle_{\text{tree}} \quad , \end{aligned} \quad (194)$$

wobei die endlichen Beiträge durch die Funktionen G_i gegeben sind.

Nach der Quarkfeld-Renormierung, die den $1/\varepsilon$ -Pol im 1. Summanden wegrenormiert, stellt man fest, daß der obige Ausdruck noch immer divergent ist. Diese zusätzlichen UV-Divergenzen sind für die effektive Seite generisch. Sie werden durch die sogenannte *Operatorrenormierung* beseitigt:

$$\langle \hat{O}_i \rangle^{(0)} = Z_q^{-2} Z_{ij}^O \langle \hat{O}_j \rangle \quad , \quad (195)$$

wobei Z_q die Quarkfeld-Renormierung repräsentiert und die Potenz sich aus der Zahl der äußeren Quark-Beine ergibt. Die Renormierungsmatrix Z_{ij}^O „entfernt“ die restlichen Divergenzen:

$$\hat{Z}^O = \mathbf{1} + \frac{\alpha_S}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (196)$$

Diese Matrix ist aufgrund ihrer im allgemeinen nichtdiagonalen Form für eine weitere Verkomplizierung verantwortlich, dem *Mischen der Operatoren* (operator-mixing). Dies bedeutet, daß über die Renormierung eines Operators \hat{O}_k andere Operatoren aus dem vollständigen Satz von Operatoren¹² in \hat{O}_k reinmischen und somit zum Wilson-Koeffizienten C_k beitragen können.

Für die renormierten Matrixelemente ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}_{1/2} \rangle &= 2 C_F \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\ln \frac{\mu^2}{-p^2} + G_1 \right) \langle \hat{O}_{1/2} \rangle_{\text{tree}} + \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\ln \frac{\mu^2}{-p^2} + G_2 \right) \langle \hat{O}_{1/2} \rangle_{\text{tree}} \\ &\quad - 3 \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\ln \frac{\mu^2}{-p^2} + G_3 \right) \langle \hat{O}_{2/1} \rangle_{\text{tree}} \quad . \end{aligned} \quad (197)$$

¹²Eine Menge von Operatoren ist vollständig, wenn sie unter der Renormierung abgeschlossen ist, d. h. bei der Renormierung treten keine neuen Operatoren auf.

Mit Hilfe der Matching-Gleichung ist es möglich, die Wilson-Koeffizienten zu extrahieren:

$$C_1(\mu) = -12 \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\ln \frac{M_W^2}{\mu^2} + F_3 - G_3 \right) , \quad (198)$$

$$C_2(\mu) = 4 + 4 \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(\ln \frac{M_W^2}{\mu^2} + F_2 - G_2 + 2 C_F (F_1 - G_1) \right) . \quad (199)$$

Es ist nun Zeit, sich noch einmal vor Augen zu führen, was bis jetzt getan wurde. Das Ergebnis der „vollen“ Seite beinhaltet sowohl kurz- als auch langreichweitige Anteile. Die OPE hat beide separiert. Aus den Feynman-Regeln des SM konstruiert man alle für den Prozeß notwendigen Diagramme bis zu einer gewünschten Potenz in der Kopplungskonstanten. Die Impulse und Massen der äußeren Beine der Diagramme sind verglichen mit der elektroschwachen Skala klein und können beliebig behandelt werden. Bisher wurden die Massen identisch Null gesetzt und die Impulse mitgenommen, später in den hier präsentierten Rechnungen werden die Impulse vernachlässigt ($B\bar{B}$ -Mixing) bzw. bis zur 2. Ordnung entwickelt ($b \rightarrow s\gamma$) und die Massen der leichten Teilchen Null gesetzt oder als Infrarot-Regulator berücksichtigt. Die einzige Forderung hierbei ist, daß die äußeren Zustände auf der „vollen“ und der effektiven Seite identisch behandelt werden. Man erkennt somit, daß die „volle“ Seite nur genähert betrachtet wird, indem man z. B. nur $1/M_W^2$ berücksichtigt und k^2/M_W^4 -Terme vernachlässigt werden (k ist ein typischer äußerer Impuls). Der Nachteil der Ergebnisse auf der „vollen“ Seite ist, daß sie kurz- und langreichweitige Beiträge gemischt enthalten. Die Trennung erfolgt nun mittels der Matching-Prozedur. Auf der effektiven Seite sind alle schweren Freiheitsgrade ausintegriert. Die leichten Teilchen sind jedoch wie im SM in der effektiven Theorie enthalten:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{QCD} \times \text{GSW}}(\text{leichte Felder}) + \sum_i C_i \langle \hat{O}_i \rangle_{\text{tree}} , \quad (200)$$

wobei die \hat{O}_i im Ausintegrationsprozeß entstehen. Durch die Diagramme in Abbildung 9 kann der Beitrag der leichten Felder (langreichweitig) auf der effektiven Seite bestimmt werden. Die „Subtraktion“ dieser Terme von der „vollen“ Seite im Matching-Prozeß ergibt die kurzreichweitigen Beiträge und somit die Wilson-Koeffizienten. Die Unterscheidung zwischen kurz- und langreichweitigen Anteilen erfolgt durch die in C_i stehende *Separationsskala* bzw. *Matchingskala*, d. h. zu C_i tragen alle Skalen höher als μ bei und zu $\langle \hat{O}_i \rangle$ alle Skalen kleiner als μ .

Durch die Abhängigkeit der Wilson-Koeffizienten von Termen der Art $\ln(M_W^2/\mu^2)$ können sie nur gültig sein für Skalen $\mu = \mathcal{O}(M_W)$, da sonst die Störungsreihe nicht mehr konvergieren würde. Es ist somit überhaupt nicht verwunderlich, warum man ungeachtet der im Prozeß vorhandenen langreichweitigen Teile die Wilson-Koeffizienten mittels naiver Störungsmethoden für $\mu = \mathcal{O}(M_W)$ berechnen kann. Nachdem die Skala μ die essentielle Bedeutung einer Separationsskala erhalten hat, ist es natürlich wichtig, nach dem Wert dieser Skala zu fragen. Leider sind die Forderungen mit der Aussage $\mu = \mathcal{O}(M_W)$ erschöpft. Das bedeutet jedoch, daß es eine gewisse Willkür gibt, welche Teile des Prozesses als kurz- oder langreichweitig angesehen werden. In der Tat ist dies eine wichtige theoretische Unsicherheit, die jedoch reduziert werden

kann, indem immer höhere Ordnungen in der Kopplungskonstanten berechnet werden.

Es wird im weiteren gezeigt, wie die RG benutzt wird, um die Wilson-Koeffizienten an der Skala $\mu = \mathcal{O}(m_b)$ anzugeben.

Bevor diese Aufgabe in Angriff genommen werden kann, muß noch eine wichtige Bemerkung folgen. Das Matching darf erst durchgeführt werden, nachdem sowohl die „volle“ als auch die effektive Seite unabhängig voneinander vollständig renormiert wurden. Alle eventuell noch auftretenden Divergenzen dürfen nur noch Infrarot-Divergenzen sein. Da das langreichweitige Verhalten der effektiven und „vollen“ Theorie identisch ist, heben sich diese Infrarot-Divergenzen beim Matching auf. Das ist ein wichtiger Check der Rechnung, da die C_i endlich sein müssen. Im Falle der dimensional Regularisierung der Infrarot-Divergenzen muß die Matching-Prozedur in D Dimensionen durchgeführt werden.

2.5.2 Renormierungsgruppengleichung für die Wilson-Koeffizienten

Die dimensionale Regularisierung führt zu der folgenden allgemeinen Struktur der Wilson-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} C(M, \mu) &= g^2 C_0^{(0)} \\ &+ g^4 \left[C_0^{(1)} + C_1^{(1)} \ln \frac{\mu^2}{M^2} \right] \\ &+ g^6 \left[C_0^{(2)} + C_1^{(2)} \ln \frac{\mu^2}{M^2} + C_2^{(2)} \ln^2 \frac{\mu^2}{M^2} \right] + \dots \quad , \end{aligned} \quad (201)$$

dabei ist M eine für den Prozeß typische schwere Masse (z. B. M_W, m_t). Es ist offensichtlich, daß für die Skala $\mu = m_b$ (typische hadronische Energie) die Störungstheorie zusammenbricht, da sehr große Logarithmen auftreten. Die RG-Gleichung ermöglicht allerdings die Skalierung zu den prozeßtypischen hadronischen Energien durch eine implizite Aufsummation der großen Logarithmen. Diese Eigenschaft führt zu einer Verbesserung der naiven Störungsreihe (renormierungsgruppenverbesserte Störungsreihe). Bevor die RG-Gleichung der Wilson-Koeffizienten effizient hergeleitet werden kann, ist es sinnvoll, das Konzept der Operatorrenormierung aus einer anderen Sichtweise zu betrachten. Dabei werden die Wilson-Koeffizienten als effektive Kopplungskonstanten angesehen, die in der üblichen Sprechweise natürlich einer Renormierungsprozedur unterzogen werden müssen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \mathcal{L}^{(0)}(\text{leichte Felder}) + C_i^{(0)} \hat{O}_i(q^{(0)}) \\ &= \mathcal{L}(\text{leichte Felder}) + Z_q^2 Z_{ji} C_j \hat{O}_i(q) \\ &= \mathcal{L}(\text{leichte Felder}) + C_i \hat{O}_i + (Z_q^2 Z_{ji} - \delta_{ij}) C_j \hat{O}_i(q) \quad , \end{aligned} \quad (202)$$

wobei die Operatoren in dem hier betrachteten Fall Funktionen von vier leichten Quarkfeldern $q^{(0)}$ bzw. q sind ($q^{(0)} = \sqrt{Z_q} q$). Werden damit auf der effektiven Seite für einen Prozeß relevante Diagramme (z. B. Abbildung 9) berechnet, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{eff}} &= Z_q^2 Z_{ji} C_j \langle \hat{O}_i \rangle^{(0)} \\
&= Z_q^2 Z_{ji} C_j Z_q^{-2} Z_{ik}^O \langle \hat{O}_k \rangle \\
&= Z_{ji} Z_{ik}^O C_j \langle \hat{O}_k \rangle \quad ,
\end{aligned} \tag{203}$$

wobei im Zwischenschritt die Gleichung (195) benutzt wurde. Auf der anderen Seite gilt:

$$\mathcal{A}_{\text{eff}} = C_j \langle \hat{O}_j \rangle = C_j Z_q^2 (Z_{ji}^O)^{-1} \langle \hat{O}_i \rangle^{(0)} \quad , \tag{204}$$

was per Konstruktion endlich ist. Damit ergibt der Vergleich der beiden letzten Relationen die folgende Beziehung:

$$Z_{ji}^{-1} = Z_{ji}^O \quad . \tag{205}$$

Für den Wilson-Koeffizienten folgt somit:

$$C_i^{(0)} = Z_{ji} C_j = (Z_{ji}^O)^{-1} C_j \quad , \tag{206}$$

und die Operatorrenormierung ist letztlich eine Renormierung von effektiven Kopplungen, den Wilson-Koeffizienten. Da der unrenormierte Wilson-Koeffizient keine Renormierungsskalenabhängigkeit aufweisen darf, muß deduziert werden:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d \ln \mu} C_i^{(0)} = 0 &= \frac{d (Z_{ij}^O)^{-1}}{d \ln \mu} C_j + (Z_{ij}^O)^{-1} \frac{d C_j}{d \ln \mu} \\
&= -(Z_{ik}^O)^{-1} \frac{d Z_{kj}^O}{d \ln \mu} C_j + \frac{d C_j}{d \ln \mu} \quad ,
\end{aligned} \tag{207}$$

was mit der Definition der anomalen Dimension:

$$\gamma_j^T = (Z_{lk}^O)^{-1} \frac{d Z_{kj}^O}{d \ln \mu} \tag{208}$$

zur RG-Gleichung für die Wilson-Koeffizienten führt:

$$\left(\frac{d}{d \ln \mu} - \hat{\gamma}^T \right) \vec{\mathbf{C}}(\mu) = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{\mathbf{C}} = (C_1, \dots, C_n) \quad . \tag{209}$$

Hierbei handelt es sich um ein System gekoppelter, linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung. Im Falle nicht vorhandener Operatormischung, d. h. einer diagonalen Matrix $\hat{\gamma}$, handelt es sich um n entkoppelte Differentialgleichungen, die sich einfach durch die Methode der Trennung

der Variablen lösen lassen. Enthält die Matrix $\hat{\gamma}$ nichtverschwindende off-diagonal Elemente, so muß zuerst diagonalisiert werden. Im weiteren soll $\hat{\gamma}$ diagonal angenommen werden und es gilt:

$$C_i(\mu) = \exp \left[\int_{\ln \mu_0}^{\ln \mu} d \ln \mu' \gamma_{ii} \right] C_i(\mu_0) \quad , \quad (210)$$

dabei sind die Anfangswerte an der Skala μ_0 bekannt (Ergebnis des Matching-Prozesses). Mit Hilfe der in Kapitel 2.4.3 eingeführten β -Funktion ergibt sich:

$$C_i(\mu) = \exp \left[\int_{g_3(\mu_0)}^{g_3(\mu)} d g' \frac{\gamma_{ii}(g')}{\beta(g')} \right] C_i(\mu_0) \quad . \quad (211)$$

Die anomale Dimension und die β -Funktion müssen nun bezüglich g_3 entwickelt werden, um das Integral im Exponenten analytisch lösen zu können. Es gilt:

$$\beta(g_3) = -\beta_0 \frac{g_3^3}{(4\pi)^2} - \beta_1 \frac{g_3^5}{(4\pi)^4} \dots \quad , \quad (212)$$

$$\hat{\gamma}(g_3) = \hat{\gamma}_0 \frac{g_3^2}{(4\pi)^2} + \hat{\gamma}_1 \frac{g_3^4}{(4\pi)^4} + \dots \quad , \quad (213)$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten entsprechend den Ausführungen von Kapitel 2.4.3 berechnet werden können. Die β -Funktion ist für die QCD universal und β_0, β_1 können in Gleichung (158) gefunden werden. Die Matrix der anomalen Dimension hängt von der am Prozeß beteiligten Operatorbasis ab.

In niedrigster Ordnung ergibt sich nach dem Einsetzen dieser Entwicklungen in (211) der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} C_i(\mu) &= \exp \left[-\frac{(\gamma_0)_{ii}}{\beta_0} \int_{g_3(\mu_0)}^{g_3(\mu)} \frac{d g'}{g'} \right] C_i(\mu_0) \\ &= \left(\frac{g_3(\mu)}{g_3(\mu_0)} \right)^{-(\gamma_0)_{ii}/\beta_0} C_{i0}^{(0)}(\mu_0) \quad , \end{aligned} \quad (214)$$

wobei aus Konsistenzgründen die niedrigste Ordnung für den Wilson-Koeffizienten aus (201) benutzt wurde. Diese Lösung wird als *Leading-Log-Approximation* (LLA) bezeichnet, d. h., sie beinhaltet die jeweils führenden Logarithmen aus Gleichung (201) in allen Ordnungen der Kopplungskonstanten. Um diese wichtige Aussage zu verstehen, benutzt man die RG-Gleichung der Kopplungskonstanten (159), deren Lösung in Gleichung (160) gefunden werden kann und hier nochmals für die niedrigste Ordnung gezeigt werden soll:

$$\alpha_S(\mu^2) = \frac{\alpha_S(\mu_0^2)}{1 + \frac{\alpha_S(\mu_0^2)}{4\pi} \beta_0 \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} \quad . \quad (215)$$

Substituiert man dieses Resultat in (214), so erhält man die Gleichung:

$$C_i(\mu) = \left[\frac{1}{1 + \frac{\alpha_S(\mu_0^2)}{4\pi} \beta_0 \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} \right]^{- (\gamma_0)_{ii} / (2\beta_0)} C_{i0}^{(0)}(\mu_0) \quad , \quad (216)$$

die nach der Entwicklung in der Kopplungskonstanten die folgende Form besitzt:

$$C_i(\mu) = \left[1 + \alpha_S(\mu_0) \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \frac{(\gamma_0)_{ii}}{8\pi} - \alpha_S^2(\mu_0) \ln^2 \frac{\mu^2}{\mu_0^2} \frac{(2\beta_0 - (\gamma_0)_{ii})(\gamma_0)_{ii}}{128\pi^2} + \dots \right] C_{i0}^{(0)}(\mu_0) \quad . \quad (217)$$

Anhand des letzten Ergebnisses ist sehr deutlich zu erkennen, daß es sich bei LO um eine Aufsummation aller Terme proportional $\alpha_S^n \ln^n$ handelt.

2.5.3 Next-to-Leading-Order-Approximation

Der Schritt von LLA hin zur *Next-to-Leading-Log-Approximation* (NLLA)¹³ ist nicht trivial. Die technischen Schwierigkeiten bei der Behandlung der Diagramme und bei der Renormierung werden enorm. Deshalb ist einige Motivation nötig, um diesen Schritt zu tun. Die NLLA-Approximation ist u. a. wichtig zum Test der RG-verbesserten Störungstheorie. Desweiteren kommt es durch den Abbruch der Störungsreihe bei einer endlichen Potenz in der Kopplungskonstanten zu einer Abhängigkeit der berechneten physikalischen Größen von der Renormierungsskala. Dieser Effekt wird reduziert in NLLA gegenüber LLA. Im Angesicht der in naher Zukunft stattfindenden Hochpräzisionsexperimente [1, 2] ist es nötig, Hochpräzisionsrechnungen durchzuführen.

Da NLO-Rechnungen den zentralen Punkt dieser Arbeit darstellen, sollen im Rahmen dieser Einführung nur ein paar allgemeine Bemerkungen gemacht werden.

Für NLO-Rechnungen ist es notwendig, die α_S -Korrekturen vollständig zu berechnen:

$$\mathcal{A}_{\text{voll}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \mathbf{V}_{\text{CKM}} \sum_i \left(A_i^{(0)} + \frac{\alpha_S(\mu_W)}{4\pi} A_i^{(1)} \right) \langle \hat{O}_i \rangle_{\text{tree}} \quad , \quad (218)$$

wobei $\mu_0 = \mu_W$ die Matching- bzw. Separationsskala repräsentiert. Auf der effektiven Seite erhält man für das Matrixelement in:

$$\mathcal{A}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \mathbf{V}_{\text{CKM}} \sum_i C_i \langle \hat{O}_i \rangle \quad (219)$$

¹³Als Synonym für die Abkürzungen LLA bzw. NLLA werden LO (Leading-Order) bzw. NLO (Next-to-Leading-Order) benutzt.

die Relation:

$$\langle \hat{O}_i \rangle = \sum_j \left(1 + \frac{\alpha_S(\mu_W)}{4\pi} r_{ji} \right) \langle \hat{O}_j \rangle_{\text{tree}} \quad . \quad (220)$$

Wird nun die effektive Theorie gleich der vollen Theorie an der Skala μ_W gesetzt, dann folgt für die Wilson-Koeffizienten:

$$C_i(\mu_W) = A_i^{(0)} + \frac{\alpha_S(\mu_W)}{4\pi} (A_i^{(1)} - r_{ji} A_j^{(0)}) \quad . \quad (221)$$

Dieses Ergebnis ist der Anfangswert für die RG-Gleichung (209). Es soll im weiteren der Einfachheit halber erneut nur der Spezialfall interessieren, daß keine Operatormischung vorliegt. Wie bereits aus den Gleichungen (210) und (211) bekannt ist, hat die Lösung die Gestalt:

$$C_i(\mu) = \exp \left[\int_{g_3(\mu_0)}^{g_3(\mu)} dg' \frac{\gamma_{ii}(g')}{\beta(g')} \right] C_i(\mu_0) \quad . \quad (222)$$

Es kann somit jeder Wilson-Koeffizient einzeln behandelt werden. Um die Notation nicht zu überladen, wird deshalb der Index i unterdrückt.

Für γ und β werden die Entwicklungen (212) bzw. (213) eingesetzt, nun jedoch bis zur Ordnung g_3^5 bzw. g_3^4 . Bevor die Integration ausgeführt wird, ist es sinnvoll, bis zur 2. Potenz in g_3 zu entwickeln, was auf folgendes Resultat führt:

$$\int_{g_3(\mu_W)}^{g_3(\mu)} dg \left[-\frac{\gamma_0}{\beta_0} \frac{1}{g} + \left(\frac{\beta_1 \gamma_0}{16 \pi^2 \beta_0^2} - \frac{\gamma_1}{16 \pi^2 \beta_0} \right) g + \mathcal{O}(g^3) \right] \quad . \quad (223)$$

Die Integration ist nun elementar ausführbar und nach einer weiteren Entwicklung der Exponentialfunktion bis zur Ordnung g_3^2 bzw. α_S erhält man:

$$C(\mu) = \left[1 + \frac{\alpha_S(\mu)}{4\pi} J \right] \left[\frac{\alpha_S(\mu_W)}{\alpha_S(\mu)} \right]^{\gamma_0/(2\beta_0)} \left[1 - \frac{\alpha_S(\mu_W)}{4\pi} J \right] C(\mu_W) \quad (224)$$

mit

$$J = \left(\frac{\gamma_0 \beta_1}{2 \beta_0^2} - \frac{\gamma_1}{2 \beta_0} \right) \quad . \quad (225)$$

Diese spezielle Art des Aufschreibens ist für die Verallgemeinerung auf den Fall mit Operatormischung günstig und wurde von Andrzej J. Buras [10] übernommen. Mit der Gleichung (221) folgt:

$$C(\mu) = \left[1 + \frac{\alpha_S(\mu)}{4\pi} J \right] \left[\frac{\alpha_S(\mu_W)}{\alpha_S(\mu)} \right]^{\gamma_0/(2\beta_0)} \left[A^{(0)} - \frac{\alpha_S(\mu_W)}{4\pi} (J - A^{(1)} + r A^{(0)}) \right] \quad . \quad (226)$$

Für den allgemeinen Fall mit Operatormischung wird auf [10] verwiesen.

3 Das $B\bar{B}$ -Mixing in Next-to-Leading-Order Approximation

Das Hauptziel ist, den Prozeß des $B\bar{B}$ -Mixings im SM und im 2HDM bis einschließlich Next-to-Leading-Order zu präsentieren. Die NLO-Rechnungen im SM wurden zum ersten Mal von der Münchner Gruppe um A. J. Buras [59] durchgeführt. Die erste Verifikation und Verallgemeinerung auf das 2HDM erfolgte in [60]. Dieses Kapitel hält sich streng an die Ausführungen in [60] und [61]. Abschließend sollen einige Ausblicke auf das MSSM gegeben werden.

3.1 Allgemeine Bemerkungen

Das $B\bar{B}$ -Mixing ist ein FCNC-Prozeß und somit geeignet nach neuer Physik (2HDM, MSSM) zu suchen, da die Beiträge von Physik jenseits des SM durchaus von derselben Größenordnung sein können wie das SM selbst. In niedrigster Ordnung der Störungstheorie wird der Prozeß über die Box-Diagramme in Abbildung 10 generiert.

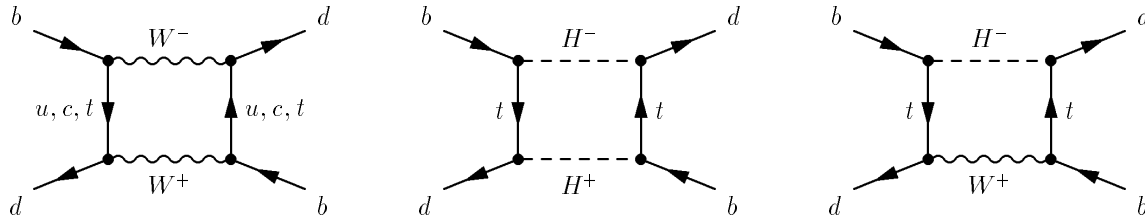


Abbildung 10: Box-Diagramme für das $B\bar{B}$ -Mixing innerhalb des 2HDM. Es existieren zusätzlich Graphen, die durch eine Fierz-Transformation aus den im Bild präsentierten Diagrammen hervorgehen.

Aufgrund der großen Skalenunterschiede zwischen den Teilchen innerhalb der Box (W-Bosonen, unphysikalische und physikalische Higgs-Bosonen, t-Quarks) und den leichten, externen Teilchen ist es möglich, die lang- und kurzreichweitigen Anteile mittels Operator-Produkt-Entwicklung (OPE) zu trennen.

Zuerst soll kurz die LO-Rechnung zusammengefaßt werden. Die zu berechnenden Diagramme in Abbildung 10 werden in der Feynman-'t Hooft-Eichung für den W-Boson-Propagator berechnet. Aus diesem Grund muß ein unphysikalisches Higgs-Boson (would-be-Goldstone Boson) in Rechnung gestellt werden. Zur Berechnung der Wilson-Koeffizienten (kurzreichweitige Beiträge) kann man alle leichten Quarks (alle Quarks außer t-Quark) als masselos annehmen. Deshalb ist in den Box-Diagrammen der physikalischen und unphysikalischen Higgs-Teilchen das t-Quark der einzige aktive Flavor (Yukawa-Kopplungen). Die leichten Quarks in den zum W-Boson gehörigen Boxen werden durch den GIM-Mechanismus [62] berücksichtigt. Der effektive Hamilton-Operator für das $B\bar{B}$ -Mixing in LO nach dem Skalieren zur hadronische Skala m_B hat das folgende Aussehen:

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{4} \frac{G_F^2}{\pi^2} m_W^2 (V_{td} V_{tb}^*)^2 \bar{\eta}_{LO} S(x_W, x_H) \hat{\mathcal{O}}_{LL}, \quad (227)$$

mit dem lokalen Operator:

$$\hat{\mathcal{O}}_{LL} = \left[\bar{d} \gamma_\mu P_L b \right] \left[\bar{d} \gamma^\mu P_L b \right] \quad (228)$$

und dem Wilson-Koeffizient:

$$S(x_W, x_H) = S_{WW}(x_W) + 2 S_{WH}(x_W, x_H) + S_{HH}(x_H) . \quad (229)$$

Die bekannten Inami-Lim-Funktionen haben die folgende Form [63]:

$$S_{WW}(x_W) = x_W \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4(1-x_W)} - \frac{3}{2(1-x_W)^2} - \frac{3x_W^2 \ln(x_W)}{2(1-x_W)^3} \right) , \quad (230)$$

$$S_{HH}(x_H) = \frac{1}{\tan^4(\beta)} \frac{x_H x_W}{4} \left(\frac{1+x_H}{(1-x_H)^2} + \frac{2x_H \ln(x_H)}{(1-x_H)^3} \right) , \quad (231)$$

$$2 S_{WH}(x_W, x_H) = \frac{1}{\tan^2(\beta)} \frac{x_H x_W}{4} \left(\frac{(2x_W - 8x_H) \ln(x_H)}{(1-x_H)^2(x_H - x_W)} + \frac{6x_W \ln(x_W)}{(1-x_W)^2(x_H - x_W)} - \frac{8 - 2x_W}{(1-x_H)(1-x_W)} \right) . \quad (232)$$

Der Faktor $\bar{\eta}_{LO}$ beinhaltet die durch die Renormierungsgruppenverbesserung entstehenden Beiträge [64]. Er bestimmt sich aus der QCD- β -Funktion und der anomalen Dimension γ . Die anomale Dimension erhält man durch die Auswertung der Diagramme in Abbildung 11. Die explizite Form von $\bar{\eta}_{LO}$ ist gegeben durch:

$$\bar{\eta}_{LO} = \left[\frac{\alpha_S(m_W)}{\alpha_S(m_B)} \right]^{\gamma^{(0)}/(2\beta_0)} = \left[\frac{\alpha_S(m_W)}{\alpha_S(m_B)} \right]^{6/23} \approx 0.85 . \quad (233)$$

Um das hadronische Matrixelement von H_{eff} berechnen zu können, benötigt man zusätzlich:

$$\langle \bar{B}^0 | \hat{\mathcal{O}}_{LL} | B^0 \rangle = \frac{2}{3} B_B(\mu) f_B^2 m_B^2 , \quad (234)$$

wobei f_B die B -Meson Zerfalls-Konstante ist und $B_B(\mu)$ den B-Parameter darstellt.

3.2 Die expliziten QCD-Korrekturen

In diesem Unterkapitel werden die QCD-Korrekturen zu den Boxen aus Abbildung 10 berechnet. Die zu untersuchenden Diagramme befinden sich im Anhang F.1 in den Abbildungen 20 und 21. Die Rechnung wird in der Feynman-’t Hooft Eichung für den W-Boson-Propagator und in einer beliebigen Eichung für das Gluon durchgeführt. Letzteres ermöglicht es, über die Eichinvarianz der Wilson-Koeffizienten die Resultate zu überprüfen.

Man kann leicht feststellen, daß die Diagramme a, b und f bis i eine Oktett-Struktur $\hat{\mathbf{T}}_a \otimes \hat{\mathbf{T}}^a$ im

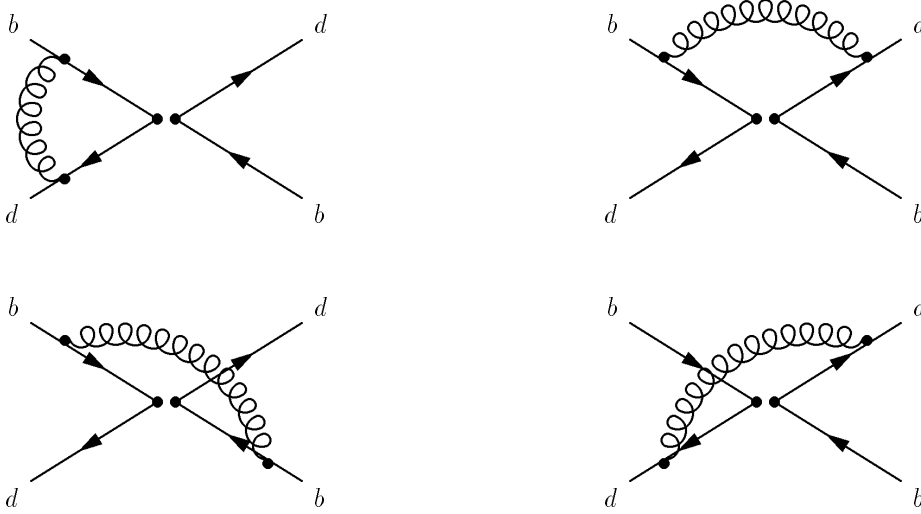


Abbildung 11: QCD-Korrekturen zum effektiven 4-Quark Operator. Sie werden zur Bestimmung der LO anomalen Dimension und zur exakten Trennung von lang- und kurzreichweitigen Beiträgen in NLO benötigt.

Farbraum haben, wohingegen die Diagramme c bis e und j eine Singlett-Struktur $\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}$ besitzen. Das Doppel-Pinguin-Diagramm k trägt zum betrachteten Prozeß zur Ordnung $\mathcal{O}(1/m_W^4)$ bei und ist somit zu vernachlässigen. Die Diagramme mit Vertex- bzw. Selbstenergiekorrektur sind UV-divergent und werden dimensional im NDR-Schema [8, 65] regularisiert. Die notwendige Renormierung erfolgt im \overline{MS} -Schema [52]. Alle anderen Diagramme sind UV-konvergent. Die Diagramme g bis j enthalten IR-Divergenzen, sobald die Massen der leichten Quarks identisch Null angenommen werden. Diese Divergenzen werden mit zwei unterschiedlichen Methoden behandelt: es werden die leichten Quarkmassen als IR-Regulatoren berücksichtigt bzw. die IR-Divergenzen werden dimensional regularisiert. Es wird festgestellt werden, daß beide Arten der IR-Regularisierung zu exakt denselben Wilson-Koeffizienten führen (siehe dazu auch die Diskussion im Kapitel 2.5.1).

Die $\mathcal{O}(\alpha_S)$ -Korrekturen zum Hamilton-Operator haben die folgende Struktur:

$$\langle \Delta H_{\text{eff}} \rangle = \frac{1}{4} \frac{G_F^2}{\pi^2} m_W^2 \frac{\alpha_S}{4\pi} (V_{td} V_{tb}^*)^2 U(x_W, x_H) \quad (235)$$

mit

$$U(x_W, x_H) = \sum_k \left(C_F \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} \phi_k^{(1)}(x_W, x_H) + \hat{\mathbf{T}}_a \otimes \hat{\mathbf{T}}^a \phi_k^{(8)}(x_W, x_H) \right) \langle \hat{\mathcal{O}}_k \rangle \quad (236)$$

und $k \in \{LL, 1, 2, 3\}$. C_F ist der entsprechende Farbfaktor, definiert durch $C_F = (n_c^2 - 1)/(2n_c)$ und n_c ist die Zahl der Farben. Im folgenden soll die Rechnung präsentiert werden, wenn die IR-Divergenzen mittels Quarkmassen regularisiert werden. In diesem Fall sieht die vollständige Operatorbasis wie folgt aus:

$$\hat{\mathcal{O}}_{LL} = [\bar{d} \gamma_\mu P_L b] [\bar{d} \gamma^\mu P_L b] , \quad (237)$$

$$\hat{\mathcal{O}}_1 = [\bar{d} P_L b] [\bar{d} P_L b] - \frac{1}{4} [\bar{d} \sigma_{\mu\nu} P_L b] [\bar{d} \sigma^{\mu\nu} P_L b] + (P_L \longrightarrow P_R) , \quad (238)$$

$$\hat{\mathcal{O}}_2 = [\bar{d} P_L b] [\bar{d} P_R b] + [\bar{d} P_R b] [\bar{d} P_L b] , \quad (239)$$

$$\hat{\mathcal{O}}_3 = [\bar{d} \gamma_\mu P_L b] [\bar{d} \gamma^\mu P_R b] + (P_L \longleftrightarrow P_R) . \quad (240)$$

Dabei entsteht der Operator $\hat{\mathcal{O}}_1$ aus der Dirac-Struktur der Diagramme g und h in Abbildung 21, wohingegen die Operatoren $\hat{\mathcal{O}}_2$ und $\hat{\mathcal{O}}_3$ aus den Diagrammen i bzw. j folgen. Der Operator $\hat{\mathcal{O}}_{LL}$ bekommt von jedem Diagramm Beiträge zu seinem Wilson-Koeffizienten. Mit der Gleichung (499) kann man die Oktett-Struktur auf die Singlett-Struktur projizieren:

$$\hat{\mathbf{T}}_a \otimes \hat{\mathbf{T}}^a = C_A \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n_c} \right) \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} . \quad (241)$$

Um die Rechnung so transparent wie möglich zu halten, soll die Unterscheidung zwischen Diagrammen mit Oktett- und Singlettstruktur erst am Ende aufgehoben werden.

Die Koeffizientenfunktion ϕ aus Gleichung (236) kann wie folgt zerlegt werden:

$$\phi_j^{(i)} = \chi_j^{(i,SM)}(x_W) + \chi_j^{(i,H)}(x_W, x_H) . \quad (242)$$

Der Index $i = \{1, 8\}$ indiziert dabei, ob es sich um ein Oktett- oder Singlettresultat handelt. Die Funktionen $\chi_j^{(i,SM)}(x_W)$ wurden zum ersten Mal in [59] angegeben und in [60] bestätigt. Sie haben die folgende Struktur:

$$\begin{aligned} \chi_{LL}^{(1,SM)}(x_W) &= L^{(1,SM)}(x_W) \\ &\quad + \left[2\xi + 2\xi g_{IR} + 2\xi \ln(x_{\mu_0}) + 6 \ln(x_{\mu_0}) x_W \frac{\partial}{\partial x_W} \right] S_{WW}(x_W) , \end{aligned} \quad (243)$$

$$\chi_{LL}^{(8,SM)}(x_W) = L^{(8,SM)}(x_W) + [2\xi + (3 + \xi) \ln(x_b x_d) + 2\xi g_{IR}] S_{WW}(x_W) , \quad (244)$$

$$\chi_1^{(8,SM)}(x_W) = -(3 + \xi) S_{WW}(x_W) , \quad (245)$$

$$\chi_2^{(8,SM)}(x_W) = -2 \chi_3^{(1,SM)}(x_W) = -(3 + \xi) \frac{m_b m_d}{m_d^2 - m_b^2} \ln \left(\frac{x_d}{x_b} \right) S_{WW}(x_W) , \quad (246)$$

wobei alle anderen χ identisch Null sind. Um die Notation kurz zu halten, wurden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$x_{W,H} = \frac{m_t^2}{m_{W,H}^2} , \quad x_{d,b} = \frac{m_{d,b}^2}{m_W^2} , \quad x_{\mu_0} = \frac{\mu_0^2}{m_W^2} , \quad (247)$$

$$g_{IR} = - \frac{x_d \ln(x_d) - x_b \ln(x_b)}{x_d - x_b} , \quad (248)$$

wobei m_t für die laufende Masse an der Skala μ_0 steht. Die Funktionen $\chi_i^{(1,H)}$ und $\chi_i^{(8,H)}$ wurden in [60] berechnet:

$$\begin{aligned} \chi_{LL}^{(1,H)}(x_W, x_H) &= L^{(1,H)}(x_W, x_H) \\ &+ \left[2\xi + 2\xi g_{IR} + 2\xi \ln(x_{\mu_0}) + 6 \ln(x_{\mu_0}) \sum_{i=H,W} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \\ &\cdot (2 S_{WH}(x_W, x_H) + S_{HH}(x_W, x_H)), \end{aligned} \quad (249)$$

$$\begin{aligned} \chi_{LL}^{(8,H)}(x_W, x_H) &= L^{(8,H)}(x_W, x_H) \\ &+ [2\xi + (3 + \xi) \ln(x_b x_d) + 2\xi g_{IR}] (2 S_{WH}(x_W, x_H) + S_{HH}(x_W, x_H)), \end{aligned} \quad (250)$$

$$\chi_1^{(8,H)}(x_W, x_H) = -(3 + \xi) (2 S_{WH}(x_W, x_H) + S_{HH}(x_W, x_H)), \quad (251)$$

$$\begin{aligned} \chi_2^{(8,H)}(x_W, x_H) &= -2 \chi_3^{(1,H)}(x_W, x_H) \\ &= -(3 + \xi) \frac{m_b m_d}{m_d^2 - m_b^2} \ln\left(\frac{x_d}{x_b}\right) (2 S_{WH}(x_W, x_H) + S_{HH}(x_W, x_H)). \end{aligned} \quad (252)$$

Die analytischen Ausdrücke für $L^{(i,SM,H)}$ sind im Anhang F.2 zu finden. Die Berechnung erfolgte mit Hilfe von Computer-Algebra Systemen, insbesondere *Form* zur Berechnung von Dirac-Strukturen, *FeynArts* [66] zur Generierung aller Diagramme, *Mathematica* [67] zur Vereinfachung der komplexen Strukturen und *Maple* [68] für einige Integrationen.

Eine interessante Eigenschaft der bisherigen Resultate ist, daß sie nichttrivial von dem Eichparameter und den leichten Massen (Regulatoremassen) abhängen, die Funktionen $L^{(i,SM,H)}$ jedoch von beiden unabhängig sind. Die Terme, welche von ξ , x_b , x_d , oder x_{μ_0} abhängen, sind in jedem Fall proportional zu den LO-Funktionen S_{WW} , S_{WH} oder S_{HH} . Es wird sich herausstellen, daß dies letztlich die exakte Trennung zwischen lang- und kurzreichweitigen Beiträgen reflektiert.

3.3 Das Matching und Skalieren zur hadronischen Skala

Nachdem die „volle“ Seite mit Hilfe von Regulatoremassen bestimmt wurde, kann nun das Matching erfolgen. Dazu müssen Operatoreinsetzungen berechnet werden. Die dazugehörigen Diagramme sind in Abbildung 11 abgebildet. Diese Diagramme müssen in derselben Weise berechnet werden wie die Diagramme auf der „vollen“ Seite, d. h. mit Regulatoremassen. Es ergibt sich nach der UV-Renormierung:

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_{LL}(\mu_0) \rangle_{\text{1loop}} = \langle \hat{\mathcal{O}}_{LL} \rangle_{\text{tree}} + \frac{\alpha_S(\mu_0)}{4\pi} \sum_k \left[C_F \chi_{\Delta,k}^{(1)}(\mu_0) + C_A \chi_{\Delta,k}^{(8)}(\mu_0) \right] \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}} \langle \hat{\mathcal{O}}_k \rangle_{\text{tree}}, \quad (253)$$

wobei die Summe über k die folgenden Werte durchläuft: $k = LL, 1, 2, 3$. Die Funktionen $\chi_{\Delta,k}^{(i)}(\mu_0)$ sind:

$$\chi_{\Delta,LL}^{(1)} = -3 + 2\xi \ln(x_{\mu_0}) + 2\xi - 2\xi \frac{1}{x_d - x_b} [x_d \ln(x_d) - x_b \ln(x_b)] , \quad (254)$$

$$\chi_{\Delta,LL}^{(8)} = -6 \ln(x_{\mu_0}) - 5 + 2\xi + (3 + \xi) \ln(x_d x_b) - 2\xi \frac{1}{x_d - x_b} [x_d \ln(x_d) - x_b \ln(x_b)] , \quad (255)$$

$$\chi_{\Delta,3}^{(1)} = -\frac{1}{2} \chi_{\Delta,2}^{(8)} = \frac{(3 + \xi)}{2} \frac{m_d m_b}{m_d^2 - m_b^2} \ln\left(\frac{x_d}{x_b}\right) , \quad (256)$$

$$\chi_{\Delta,1}^{(8)} = -(3 + \xi) . \quad (257)$$

Für das Matrixelement der effektiven Hamilton-Funktion kann im Kalkül der OPE bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_S)$ geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \langle H_{\text{eff}} \rangle &= \langle H_{\text{eff}}^{(0)} + \Delta H_{\text{eff}}^{(1)} \rangle \\ &= \frac{1}{4} \frac{G_F^2}{\pi^2} m_W^2 (V_{td} V_{tb}^*)^2 C_{LL}(\mu_0) \langle \hat{\mathcal{O}}_{LL}(\mu_0) \rangle_{1\text{loop}} , \end{aligned} \quad (258)$$

wobei $\langle \mathcal{O}_{LL}(\mu_0) \rangle_{1\text{loop}}$ in Gleichung (253) gefunden werden kann. Die noch unbekannten $C_{LL}(\mu_0)$ werden durch das Gleichsetzen der „vollen“ und effektiven Seite bestimmt. Bis einschließlich der QCD-Korrekturen wird geschrieben:

$$C_{LL}(\mu_0) = S_{2\text{HDM}}(x_W, x_H) + \frac{\alpha_S(\mu_0)}{4\pi} D_{2\text{HDM}}(x_W, x_H, x_{\mu_0}) \quad (259)$$

mit

$$S_{2\text{HDM}}(x_W, x_H) = S_{WW}(x_W) + 2 S_{WH}(x_W, x_H) + S_{HH}(x_H) , \quad (260)$$

$$D_{2\text{HDM}}(x_W, x_H, x_{\mu_0}) = D_{SM}(x_W, x_{\mu_0}) + D_H(x_W, x_H, x_{\mu_0}) , \quad (261)$$

$$\begin{aligned} D_{SM}(x_W, x_{\mu_0}) &= C_F \left\{ L^{(1,SM)}(x_W) + \left[6 \ln(x_{\mu_0}) \left(x_W \frac{\partial}{\partial x_W} \right) + 3 \right] S_{WW}(x_W) \right\} \\ &\quad + C_A \left\{ L^{(8,SM)}(x_W) + \left[6 \ln(x_{\mu_0}) + 5 \right] S_{WW}(x_W) \right\} , \end{aligned} \quad (262)$$

$$\begin{aligned} D_H(x_H, x_W, x_{\mu_0}) &= C_F \left\{ L^{(1,H)}(x_W, x_H) \right. \\ &\quad \left. + \left[6 \ln(x_{\mu_0}) \sum_{i=H,W} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + 3 \right] \left(2 S_{WH}(x_W, x_H) + S_{HH}(x_W, x_H) \right) \right\} \\ &\quad + C_A \left\{ L^{(8,H)}(x_W, x_H) \right. \\ &\quad \left. + \left[6 \ln(x_{\mu_0}) + 5 \right] \left(2 S_{WH}(x_W, x_H) + S_{HH}(x_W, x_H) \right) \right\} . \end{aligned} \quad (263)$$

Um dieses Resultat in der angegebenen Form schreiben zu können, muß die Gleichung (241) benutzt werden, sowie das spezielle Verhalten von $\hat{\mathcal{O}}_{LL}$ unter Fierz-Transformation. Man kann feststellen, daß die Wilson-Koeffizienten $C_{LL}(\mu_0)$ nicht mehr von den externen Zuständen und von der Eichung abhängen. Dies ist eine sehr wichtige Eigenschaft der Wilson-Koeffizienten und zugleich ein Test der Resultate. Zum anderen sieht man, daß die Operatoren $\hat{\mathcal{O}}_{1,2,3}$ einen Wilson-Koeffizienten identisch Null erhalten haben. Sie sind in diesem Sinne unphysikalische Operatoren, die nur durch das spezielle IR-Regularisationsverfahren aufgetreten sind.

Der nächste Schritt besteht in dem Skalieren der Wilson-Koeffizienten von der Skala μ_0 zur hadronischen Skala m_B (siehe dazu auch die ausführlichen Diskussionen in den Kapiteln 2.4.3 und 2.5.2). In [59] wurde gezeigt, daß $\mu_0 = m_W$ eine gute Wahl für die Anfangsbedingung der RG-Gleichung ist. Die RG-Gleichung für $C_{LL}(\mu)$ ist gegeben durch:

$$\left[\mu \frac{d}{d\mu} - \gamma^T(g_3) \right] C_{LL}(\mu) = 0 \quad . \quad (264)$$

Als Anfangsbedingung wählt man $C_{LL}(\mu_0 = m_W)$, welche in Gleichung (259) gegeben ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$C_{LL}(\mu) = \exp \left[- \int_{g_3(\mu)}^{g_3(m_W)} dg' \frac{\gamma(g')}{\beta(g')} \right] C_{LL}(m_W) \quad . \quad (265)$$

Unter Ausnutzung der Gleichungen (158), (212) und (213), sowie

$$\gamma^{(0)} = 6 \frac{n_c - 1}{n_c} \quad , \quad (266)$$

$$\gamma^{(1)} = \frac{n_c - 1}{2 n_c} \left[-21 + \frac{57}{n_c} - \frac{19}{3} n_c + \frac{4}{3} n_f \right] \quad (267)$$

kann die Lösung in NLO-Approximation geschrieben werden als [7, 10, 60, 65, 69]:

$$\begin{aligned} C_{LL}(\mu) &\approx \exp \left[\int_{g_3(\mu)}^{g_3(m_W)} dg \frac{\gamma^{(0)} g^2 / (4\pi)^2 + \gamma^{(1)} g^4 / (4\pi)^4}{\beta_0 g^3 / (4\pi)^2 + \beta_1 g^5 / (4\pi)^4} \right] C_{LL}(m_W) \\ &= \exp \left[\int_{\alpha_S(\mu)}^{\alpha_S(m_W)} d\alpha'_S \frac{1}{2} \left\{ \frac{\gamma^{(0)}}{\beta_0 \alpha'_S + \beta_1 / (4\pi)^2 \alpha'^2_S} + \frac{\gamma^{(1)}}{\beta_0 (4\pi)^2 + \beta_1 \alpha'_S} \right\} \right] C_{LL}(m_W) \quad . \end{aligned} \quad (268)$$

Dieses Resultat läßt sich nun durch elementare Integration weiter umwandeln in:

$$C_{LL}(\mu) = \overline{\eta}_{LO} \left[1 + \frac{\alpha_S(m_W) - \alpha_S(\mu)}{4\pi} \left(\frac{\gamma^{(1)}}{2\beta_0} - \frac{\gamma^{(0)}}{2\beta_0^2} \beta_1 \right) \right] C_{LL}(m_W) \quad , \quad (269)$$

mit dem bekannten LO-Skalierungsfaktor $\overline{\eta}_{LO}$, der in Gleichung (233) gegeben ist. Somit ergibt sich als abschließendes Resultat für den effektiven Hamilton-Operator:

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{4} \frac{G_F^2}{\pi^2} m_W^2 (V_{td} V_{tb}^*)^2 \eta_2(x_W, x_H) S_{2\text{HDM}}(x_W, x_H) \tilde{\mathcal{O}}_{LL} \quad (270)$$

mit

$$\eta_2(x_W, x_H) = \alpha_S(m_W)^{\gamma^{(0)}/(2\beta_0)} \left[1 + \frac{\alpha_S(m_W)}{4\pi} \left(\frac{D_{2\text{HDM}}(x_W, x_H)}{S_{2\text{HDM}}(x_W, x_H)} + Z \right) \right], \quad (271)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{LL} = \alpha_S(\mu)^{-\gamma^{(0)}/(2\beta_0)} \left[1 + \frac{\alpha_S(\mu)}{4\pi} Z \right] \hat{\mathcal{O}}_{LL}, \quad (272)$$

wobei die folgende Abkürzung gewählt wurde:

$$Z = \frac{\gamma^{(1)}}{2\beta_0} - \frac{\gamma^{(0)}}{2\beta_0^2} \beta_1. \quad (273)$$

3.4 Dimensionale Regularisierung der IR-Divergenzen

Bei den bisherigen Verfahren wurden die UV-Divergenzen dimensional und die IR-Divergenzen mittels Regulatormassen behandelt. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, daß durch die Unterscheidung von UV- und IR-Divergenzen explizit verifiziert werden kann, ob die Renormierungsprozedur richtig durchgeführt wurde. Mit anderen Worten, nach der Renormierung müssen alle $1/\varepsilon$ -Pole verschwunden sein. Nachteilig ist hier vor allem das Auftreten von unphysikalischen Operatoren und die Abhängigkeit der 2-loop-Diagramme von leichten Massen. In dem einleitenden Kapitel 2.5 wurde diskutiert, daß die Art und Weise der Behandlung der äußeren Zustände und somit der IR-Divergenzen keinen Einfluß auf die Bestimmung der Wilson-Koeffizienten hat. Es ist somit naheliegend, die Massen der leichten Quarks Null zu setzen und die IR- und UV-Divergenzen simultan dimensional zu regularisieren. Die Diagramme hängen nur noch von den schweren Massen ab, und die Operatoren $\hat{\mathcal{O}}_i$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ treten nicht mehr auf. Weiterhin vereinfacht sich die Rechnung auf der effektiven Seite. Nach der UV-Renormierung bleiben nach wie vor $1/\varepsilon$ -Pole erhalten, die dann IR-Divergenzen darstellen. Diese Pole werden im Matching-Prozeß zum Verschwinden gebracht. Das ist der Nachteil der Methode. Die Matching-Prozedur muß in D -Dimensionen¹⁴ durchgeführt werden, und das wiederum erfordert die Einführung eines evaneszenten Operators. Dieser Operator verdankt seinen Namen der Eigenschaft, in $D \rightarrow 4$ Dimensionen zu verschwinden. Der hier notwendige evanescente Operator hat die Gestalt:

$$\hat{\mathcal{O}}^E = \gamma_{\alpha_1} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_3} P_L \otimes \gamma_{\alpha_3} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_1} P_L - (4 + a\varepsilon) \hat{\mathcal{O}}_{LL}. \quad (274)$$

Es wird sich herausstellen, daß der Operator $\hat{\mathcal{O}}^E$ aufgrund der Dirac-Struktur nur für das SM, nicht jedoch für das 2HDM bzw. MSSM notwendig ist. Eine äquivalente Problematik tritt in

¹⁴Die 1-loop-Diagramme müssen bis einschließlich der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$ berechnet werden, wenn bei der gewünschten höchsten Ordnung in der Koppungskonstanten Pole der Struktur $1/\varepsilon^n$ auftreten.

den Prozessen $B \rightarrow X_S \nu \bar{\nu}$ bzw. $B \rightarrow X_S l^- l^+$ auf [70]. Um das NLO-Matching durchführen zu können, wird der LO-Wilson-Koeffizient des evaneszenten Operators benötigt, d. h. das LO-Matching muß bereits in D Dimensionen durchgeführt werden. Die Box-Diagramme mit zwei W-Bosonen sind die einzigen Diagramme, die zum Wilson-Koeffizienten S^E einen Beitrag liefern. Es gilt:

$$S^E(x_W, x_H) = S_{WW}^E(x_W) + 2 S_{WH}^E(x_W, x_H) + S_{HH}^E(x_H) \quad , \quad (275)$$

mit

$$\begin{aligned} S_{WW}^E(x_W) &= S_{(W,W)}^E + 2 S_{(W,\phi)}^E + S_{(\phi,\phi)}^E \\ &= x_W \left[\frac{1+x_W}{2(1-x)^2} + \frac{x_W}{(1-x)^3} \ln x_W \right] + 0 + 0 \quad , \end{aligned} \quad (276)$$

$$S_{WH}^E(x_W, x_H) = 0 \quad , \quad (277)$$

$$S_{WW}^E(x_H) = 0 \quad . \quad (278)$$

Das Nichtverschwinden des Wilson-Koeffizienten $S_{WW}^E(x_W)$ für die Box mit zwei W-Bosonen ist der entscheidende Unterschied zu den anderen Diagrammen. Aufgrund der Struktur des evaneszenten Operators gilt¹⁵:

$$S_{(W,W)}^E = \frac{1}{4} S_{(W,W)} \quad . \quad (279)$$

Im weiteren soll die effektive Seite betrachtet werden. Dabei wird sich zuerst auf den Singlett-Fall beschränkt. In der effektiven Lagrange-Dichte werden die nackten Größen durch renormierte ersetzt:

$$C_{LL} \hat{O}_{LL} + C^E \hat{O}^E \rightarrow Z_q^2 \left(C_{LL} Z_{NN} \hat{O}_{LL} + C_{LL} Z_{NE} \hat{O}^E + C^E Z_{EN} \hat{O}_{LL} + C^E Z_{EE} \hat{O}^E \right) . \quad (280)$$

Hierbei steht Z_q für die gewöhnliche QCD Quark-Wellenfunktionsrenormierung. Die Potenz von Z_q bestimmt sich aus der Anzahl der äußeren Quark-Beine dividiert durch 2. Die Wilson-Koeffizienten C_{LL} und C^E sind wie folgt definiert:

$$C_{LL} = S_{2\text{HDM}}(x_W, x_H) + \frac{\alpha_S}{4\pi} D'_{2\text{HDM}}(x_W, x_H, x_{\mu_0}) \quad , \quad (281)$$

$$C^E = S^E + \mathcal{O}(\alpha_S) \quad , \quad (282)$$

wobei die Gleichungen (259) bis (261) verwendet wurden. Die Z_{ij} stellen die Renormierungskoeffizienten für die Operatorrenormierung dar (N steht für den „normalen“ Operator \hat{O}_{LL} , E

¹⁵Diese Beziehung gilt für $a \neq 0$ in Gleichung (274) nur für die Terme, welche nicht proportional ε sind. Da die Renormierungskonstante, welche für die Mischung des evaneszenten Operators in \hat{O}_{LL} verantwortlich ist, keine $1/\varepsilon$ -Pole aufweist, können die ε -proportionalen Terme in $S_{(W,W)}^E$ sicher vernachlässigt werden und somit ist die Gleichung auch für ein beliebiges a korrekt.

steht für den evanescenten Operator \hat{O}^E). Diese Renormierungskonstanten werden im Singlett-Fall durch das 1. Diagramm in Abbildung 11 bestimmt. Es ist notwendig nur die UV-Anteile zu berechnen, da nur diese für die Z_{ij} relevant sind. Dies läßt sich sehr einfach mittels eines gemeinsamen Massenregulators ausführen [15]. Man erhält:

$$Z_{NN} = 1, \quad Z_{NE} = 0, \quad Z_{EN} = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F 48 + \mathcal{O}(\alpha_S^2), \quad Z_{EE} = 1 + \mathcal{O}(\alpha_S^2), \quad (283)$$

wobei die ersten beiden Gleichungen zu allen Ordnungen in α_S gelten, da der Quark-Strom für verschwindende Massen erhalten ist. Mit diesen Ergebnissen nimmt die Matching-Gleichung die folgende einfache Gestalt an:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{1- und 2-loop} \\ \text{SM-Diagramme} \\ \text{(Singlett)} \end{array} \right) &= (\text{const.}) \times \left\{ \left[S_{2\text{HDM}} + \frac{\alpha_S}{4\pi} (D'_{2\text{HDM}} + C_F 48 S^E) \right] \langle \hat{O}_{LL} \rangle_{\text{tree}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\begin{array}{c} \text{in D=4 endliche} \\ \text{Funktion} \end{array} \right) \langle \hat{O}^E \rangle_{\text{tree}} \right\} \\ &= (\text{const.}) \times \left\{ \left[S_{2\text{HDM}} + \frac{\alpha_S}{4\pi} (D'_{2\text{HDM}} + C_F 12 S_{(W,W)}) \right] \langle \hat{O}_{LL} \rangle_{\text{tree}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\begin{array}{c} \text{in D=4 endliche} \\ \text{Funktion} \end{array} \right) \langle \hat{O}^E \rangle_{\text{tree}} \right\} . \end{aligned} \quad (284)$$

Bei dieser Matching-Gleichung wurde konsistent auf der „vollen“ und effektiven Seite die Quark-Wellenfunktionsrenormierung ignoriert. Da sich S_E nur für die 1-loop-Diagramme mit zwei W-Bosonen als ungleich Null herausgestellt hat, ist die hier präsentierte Rechnung nur für diesen Fall nötig. Sobald physikalische oder unphysikalische Higgs-Teilchen bzw. SUSY-Teilchen in der Box laufen, bringt der evanescente Operator keinen Beitrag und die hier präsentierte Methode ist viel trivialer als die mit IR-Regulatoremassen.

Aus der Matching-Gleichung ergeben sich die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} D'_{\text{SM}} + C_F 12 S_{(W,W)} &= C_F \left\{ L^{(1,SM)}(x_W) + \left[6 \ln(x_{\mu_0}) \left(x_W \frac{\partial}{\partial x_W} \right) + 3 \right] S_{WW}(x_W) \right\} \\ &\quad + C_F 12 S_{(W,W)} \\ D'_H &= C_F \left\{ L^{(1,H)}(x_W, x_H) \right. \\ &\quad \left. + \left[6 \ln(x_{\mu_0}) \sum_{i=H,W} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + 3 \right] \left(2 S_{WH}(x_W, x_H) + S_{HH}(x_W, x_H) \right) \right\} , \end{aligned} \quad (285)$$

und somit gilt im Singlett-Fall:

$$D'_{2\text{HDM}} = D'_{\text{SM}} + D'_H = D_{2\text{HDM}} . \quad (286)$$

Im weiteren müssen die Oktett-Diagramme betrachtet werden. Die Berechnung erfolgt in völliger Analogie zum bisher beschriebenen. Die Renormierungskonstanten Z_{ij} werden über die

letzten drei Diagramme in Abbildung 11 berechnet. Bei der Einsetzung des Operators \hat{O}^E erhält man einen weiteren evaneszenten Operator \hat{E} :

$$\hat{E} = \gamma_{\alpha_1} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_3} \gamma_{\alpha_4} \gamma_{\alpha_5} P_L \otimes \gamma_{\alpha_5} \gamma_{\alpha_4} \gamma_{\alpha_3} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_1} P_L - (16 + b\varepsilon) \hat{O}_{LL} \quad . \quad (287)$$

Dieser Operator hat jedoch keinen Einfluß auf den NLO-Wilson-Koeffizienten, da er keinen LO-Beitrag erhält. Die Renormierungskonstanten bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_S)$ ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} Z_{NN} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon} C_A 6 \quad , \quad Z_{NE} = -\frac{\alpha_S}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon} C_A \quad , \\ Z_{EN} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (48 + 8a - b) \quad , \quad Z_{EE} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon} C_A 14 \quad . \end{aligned} \quad (288)$$

Die Matching-Relation lautet nun analog zu (284):

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \text{1- und 2-loop} \\ \text{SM-Diagramme} \\ \text{(Oktett)} \end{array} \right) &= (\text{const.}) \times \left\{ \left[S_{2\text{HDM}} + \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(D'_{2\text{HDM}} + C_A (48 + 8a - b) S^E \right) \right] \langle \hat{O}_{LL} \rangle_{\text{tree}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\begin{array}{c} \text{in D=4 endliche} \\ \text{Funktion} \end{array} \right) \langle \hat{O}^E \rangle_{\text{tree}} + \left(\begin{array}{c} \text{in D=4 endliche} \\ \text{Funktion} \end{array} \right) \langle \hat{E} \rangle_{\text{tree}} \right\} \quad . \end{aligned}$$

Auch im Oktett-Fall ergibt sich Übereinstimmung zwischen den Termen proportional C_A in $D_{2\text{HDM}}$ und $D'_{2\text{HDM}}$. Die Abhängigkeit von b entfällt, wohingegen die Abhängigkeit von a erhalten bleibt. Dieser Sachverhalt ist verwunderlich, da der Wilson-Koeffizient unabhängig von derartigen aus der Regularisierung oder Renormierung stammenden Größen sein sollte. In der Tat, der Wilson-Koeffizient wird nach der Skalierung zur hadronischen Skala unabhängig von a . Die anomale Dimension für die Skalierung ist ebenso eine Funktion von a ab, so daß die Skalierungsprozedur das Endergebnis unabhängig macht. Um die Wilson-Koeffizienten an der Skala m_W vergleichen zu können wird $a = -8$ gesetzt, da dieser Wert für a implizit auch in der Rechnung mit Regulatormassen und für die Berechnung der anomalen Dimension benutzt wurde.

3.5 Resultate

Im weiteren soll der experimentell meßbare Massenunterschied Δm_B zwischen den Masseneigenzuständen B_H und B_L untersucht werden. Δm_B ist direkt gegeben durch die $B\bar{B}$ -Mischungsamplitude:

$$\begin{aligned} \Delta m_B &= \frac{1}{m_B} |\langle B^0 | H_{\text{eff}} | \bar{B}^0 \rangle| \\ &= \frac{G_F^2}{6\pi^2} m_W^2 (V_{td} V_{tb}^*)^2 S_{2\text{HDM}}(x_W, x_H) \eta_2(x_W, x_H) B_B f_B^2 m_B \quad . \end{aligned} \quad (289)$$

Das Resultat von Gleichung (289) ergibt sich bei Benutzung von (234). B_B ist der renormierungsschema-unabhängige B-Parameter [59]:

$$B_B = B_B(\mu) \alpha_S(\mu)^{-6/23} \left[1 - \frac{\alpha_S(\mu)}{4\pi} \left(\frac{\gamma^{(1)}}{2\beta_0} - \frac{\gamma^{(0)}}{2\beta_0^2} \beta_1 \right) \right]. \quad (290)$$

In der numerischen Auswertung wird für den B-Parameter der Wert $B_B = 1.31 \pm 0.03$ [72] benutzt.

Der gegenwärtige experimentelle Mittelwert für den Massenunterschied ist $\Delta m_B = 3.0541 \cdot 10^{-13}$ GeV [26]. Aufgrund der hohen Präzision dieses Meßergebnisses ist das $B\bar{B}$ -Mixing geeignet für die Untersuchung von $(V_{td} V_{tb}^*)$. Für die numerische Auswertung wird $\Delta m_B = 3.05 \cdot 10^{-13}$ GeV [73] benutzt.

Aus Abbildung 12 ist ersichtlich, daß sich die Differenz für das LO-Resultat und das entsprechende NLO-Resultat von V_{td} auf ungefähr 7 % beläuft, wenn $m_t^{\text{pole}} = 175$ GeV benutzt wird. Das bedeutet jedoch, daß durch die NLO-Beiträge eine Minimierung des Ergebnisses für Δm_B von ca. 15 % entsteht. Dieser Schluß ist sofort nachvollziehbar, wenn man $\eta_{LO} = \alpha_S(M_W)^{6/23}$ und η_2 im SM vergleicht. Es gilt $\eta_2 = 0.4942$ und $\eta_{LO} = 0.5751$.

Sobald das 2HDM II in Rechnung gestellt wird, muß das entsprechende CKM-Matrixelement verkleinert werden, um eine Überschneidung zwischen Experiment und Theorie in einem sinnvollen Bereich für die Higgs-Masse zu erzielen. In Abbildung 13 ist zu erkennen, daß es kein physikalisches Higgs-Boson mit einer Masse kleiner 1 TeV geben kann, wenn man für V_{td} Werte größer als 0.0086 annimmt und $\tan \beta = 1$ und $f_B \sqrt{B_B} = 0.2$ GeV setzt.

Die Graphen in Abbildung 12 und 13 sind konsistent, denn für den SM-Limes $m_H \rightarrow \infty$ wird das SM-Resultat reproduziert. Für Higgs-Massen größer als 1 TeV läßt sich das 2HDM nicht mehr vom SM unterscheiden, wenn die Fehler für $f_B \sqrt{B_B}$ und m_t berücksichtigt werden. In Abbildung 14 ist das relativ sensitive Verhältnis zwischen top-Quark Masse und Higgs-Boson-Masse gegeben. In der Abbildung 15 wurde die LO-Rechnung mit der NLO-Rechnung für zwei typische Werte von V_{td} sowie $\tan \beta = 1.25$ verglichen. Der Unterschied zwischen NLO und LO ist in diesem Fall ungefähr 18 %.

Eine sehr wichtige Erkenntnis aus diesem Kapitel zeigt, daß in der Tat die Behandlung der äußeren Zustände, wie bereits in Kapitel 2.5.1 besprochen, völlig willkürlich ist und keinen Einfluß auf die Wilson-Koeffizienten zu verzeichnen ist.

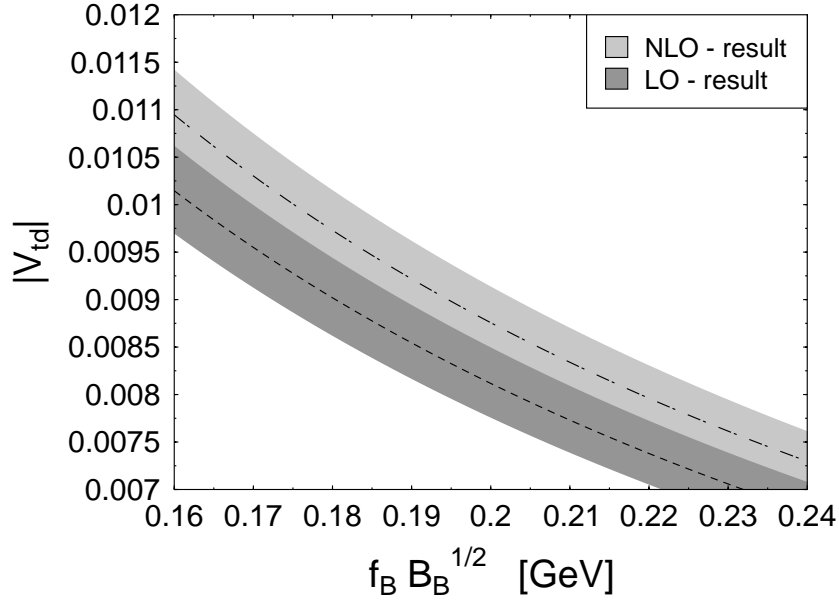


Abbildung 12: Die schattierten Gebiete stellen die experimentell erlaubten Regionen dar, wenn der Fehler von Δm_B und m_t in Rechnung gestellt ist. Es existiert ein schmaler Überlapp zwischen dem LO-Resultat und dem NLO-Resultat.

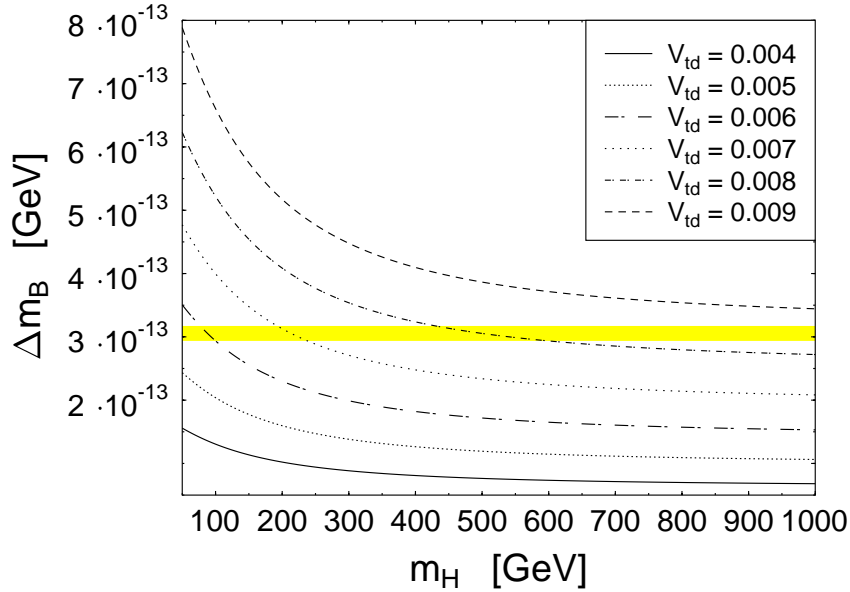


Abbildung 13: In dieser Figur ist die Massenaufspaltung im 2HDM auf NLO-Niveau für unterschiedliche Werte von V_{td} und für $\tan \beta = 1$ dargestellt. Die top-Quark-Masse ist hier identisch der Pol-Masse $m_t^{\text{pole}} = 175$ GeV. Der schattierte Streifen ist der experimentell erlaubte Bereich. Der Faktor $f_B B_B^{1/2}$ ist auf 0.2 GeV fixiert. Der SM-Limes $m_H \rightarrow \infty$ ergibt das vom SM vorhergesagte Resultat.

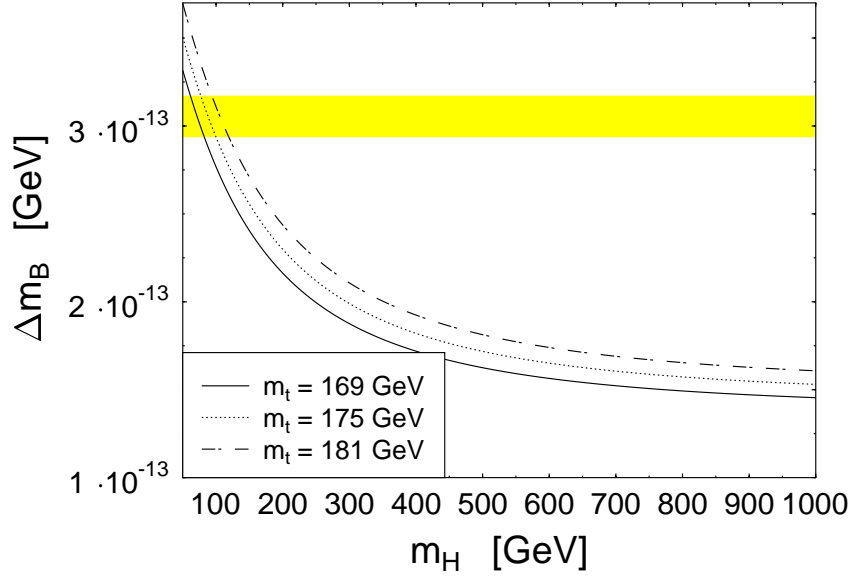


Abbildung 14: Der Massenunterschied im Rahmen des 2HDM ist für unterschiedliche top-Quark-Pol-Massen dargestellt. Es wurde $V_{td} = 0.006$, $\tan \beta = 1$ und $f_B B_B^{1/2} = 0.2$ GeV angenommen.

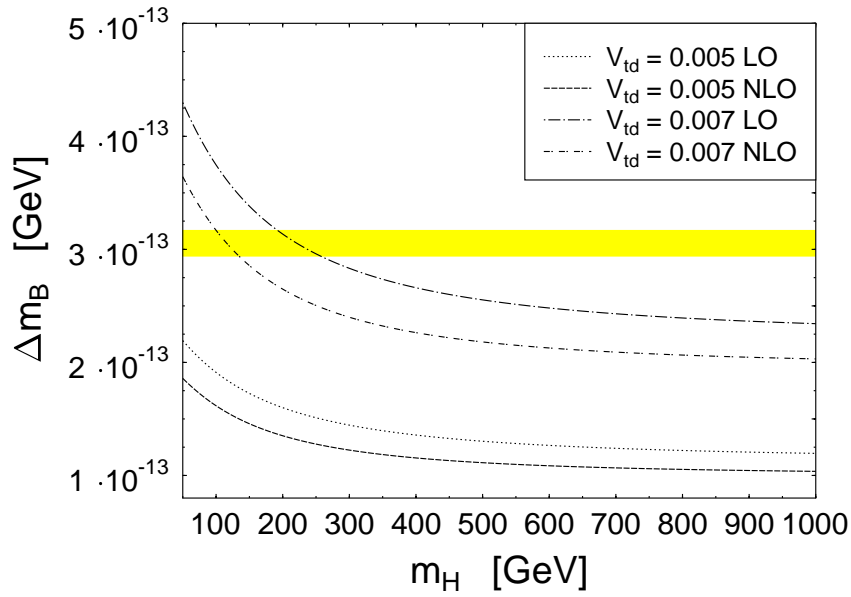


Abbildung 15: Ein Vergleich zwischen LO- und NLO-Ergebnissen im 2HDM ist aufgezeigt. Hierbei sind: $\tan \beta = 1.25$, $f_B B_B^{1/2} = 0.2$ GeV und $m_t^{\text{pole}} = 175$ GeV.

3.6 Schlußfolgerungen

Im SM ergaben die NLO-Korrekturen eine Veränderung von $|V_{td}|$ von ca. 7% und somit für die Massenaufspaltung von ca. 15%. Dies rechtfertigt die Anstrengungen, die unternommen werden müssen, um den Schritt von der LO-Approximation zur NLO-Approximation zu machen. Es kann gezeigt werden, daß das Schema zur Trennung von lang- und kurzreichweitigen Beiträgen, welches von Buras et al. [10, 59] entwickelt wurde, auch im 2HDM gültig ist. Das war u. a. ein sehr wichtiger Test für die Rechnungen.

Die NLO-Beiträge spielen auch im 2HDM eine wichtige Rolle, da sie ebenfalls eine Korrektur von ca. 18% gegenüber den LO-Ergebnissen darstellen.

Durch die zwei geladenen, physikalischen Higgs-Bosonen kommt es zu einer Erhöhung der Amplitude, deren spezieller Wert von der Higgs-Masse und $\tan\beta$ abhängt. Deshalb muß man das CKM-Matrixelement V_{td} im 2HDM kleiner annehmen als im SM, um mit den experimentellen Grenzen konsistent zu sein.

Im Limes sehr großer Higgs-Massen werden die SM-Ergebnisse reproduziert.

Es wäre wünschenswert, die Ergebnisse auf das MSSM zu erweitern, um sehen zu können, ob die großen Korrekturen des 2HDM vom MSSM relativiert werden. Die Rechnungen im MSSM sind sehr kompliziert. Dies soll im folgenden Kapitel angedeutet werden.

3.7 Das $B\bar{B}$ -Mixing im MSSM

Dieses Unterkapitel soll andeuten, welche Schwierigkeiten bei der Behandlung des $B\bar{B}$ -Mixings in einem allgemeinen MSSM-Szenario auftreten. Die Anzahl der Operatoren wächst und bereits bei einfachen Diagrammen entstehen unhandliche Ausdrücke. Der Grund hierfür sind zum einen die Kopplungen der Charginos, Neutralinos und Gluinos, sowohl an links- als auch an rechtshändige Felder, und zum anderen der Majorana-Charakter der Neutralinos und Gluinos. Die notwendigen Diagramme sind in Abbildung 16 dargestellt.

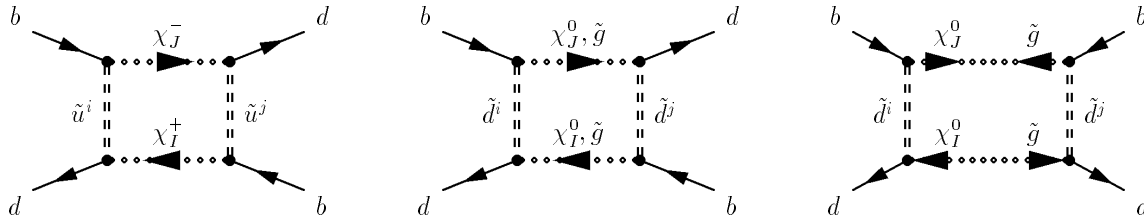


Abbildung 16: Supersymmetrische Beiträge zum $B\bar{B}$ -Mixing im Rahmen des MSSM. Die ersten beiden Diagramme sind Dirac-Diagramme, wohingegen das dritte ein Majorana-Diagramm darstellt. Zusätzlich zu den gezeigten Feynman-Graphen sind noch die durch eine Fierz-Transformation entstehenden Diagramme zu berücksichtigen.

Die Schwierigkeiten sollen exemplarisch am Beispiel zweier Boxdiagramme mit jeweils zwei verschiedenen Dirac-Fermionen und zwei verschiedenen Majorana-Fermionen gezeigt werden. Die Spezifizierung auf den Fall zweier Gluinos, die massenentartet sind, erfolgt durch einen

einfachen Grenzübergang¹⁶. Einige Ausführungen zur Konvention für Majorana-Fermionen sind im Anhang C zu finden. Bei Dirac-Fermionen ist die Richtung der Fermionenlinie eindeutig festgelegt, wohingegen bei Majorana-Teilchen die Richtung vollkommen willkürlich ist. Der Grund dafür ist, daß man bei Majorana-Fermionen nicht zwischen Teilchen und Anti-Teilchen unterscheidet. Es gibt die drei folgenden Möglichkeiten für einen Propagator [42]:

$$\begin{aligned}
\beta \longrightarrow \alpha & \quad \left(\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right)_{\alpha\beta} , \\
\beta \longrightarrow \longleftarrow \alpha & \quad \left(\frac{iC^{-1}(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right)_{\alpha\beta} , \\
\beta \longleftarrow \longrightarrow \alpha & \quad \left(\frac{-i(\not{p} + m)C}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right)_{\alpha\beta} ,
\end{aligned}$$

was letztlich seine Widerspiegelung im dritten Feynman-Diagramm von Bild 16 findet. Die Amplitude zum mittleren Diagramm besitzt die folgende Struktur:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_D &= \mathcal{C} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\left[\bar{d} \left(\Gamma_{jd}^{D_L} P_R - \Gamma_{jd}^{D_R} P_L \right) (\not{q} + m_1) \left(\Gamma_{ib}^{D_L} P_L - \Gamma_{ib}^{D_R} P_R \right) b \right]}{(q^2 - m_1^2)(q^2 - m_3^2)} \\
&\quad \times \frac{\left[\bar{d} \left(\Gamma_{id}^{D_L} P_R - \Gamma_{id}^{D_R} P_L \right) (\not{q} + m_2) \left(\Gamma_{jb}^{D_L} P_L - \Gamma_{jb}^{D_R} P_R \right) b \right]}{(q^2 - m_2^2)(q^2 - m_4^2)} \\
&= \mathcal{C} I_1 m_1 m_2 \left\{ \Gamma_{jd}^{D_R} \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{id}^{D_R} \Gamma_{jb}^{D_L} \hat{O}_{LL} + \Gamma_{jd}^{D_L} \Gamma_{ib}^{D_R} \Gamma_{id}^{D_L} \Gamma_{jb}^{D_R} \hat{O}_{RR} \right. \\
&\quad \left. + \Gamma_{jd}^{D_R} \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{id}^{D_L} \Gamma_{jb}^{D_R} \hat{O}_{LR} + \Gamma_{jd}^{D_L} \Gamma_{ib}^{D_R} \Gamma_{id}^{D_R} \Gamma_{jb}^{D_L} \hat{O}_{RL} \right\} \\
&+ \frac{1}{4} \mathcal{C} I_2 \left\{ \Gamma_{jd}^{D_L} \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{id}^{D_L} \Gamma_{jb}^{D_L} \hat{O}_{LL}^V + \Gamma_{jd}^{D_R} \Gamma_{ib}^{D_R} \Gamma_{id}^{D_R} \Gamma_{jb}^{D_R} \hat{O}_{RR}^V \right. \\
&\quad \left. + \Gamma_{jd}^{D_L} \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{id}^{D_R} \Gamma_{jb}^{D_R} \hat{O}_{LR}^V + \Gamma_{jd}^{D_R} \Gamma_{ib}^{D_R} \Gamma_{id}^{D_L} \Gamma_{jb}^{D_L} \hat{O}_{RL}^V \right\} ,
\end{aligned} \tag{291}$$

mit den Integralen:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m_1^2)(q^2 - m_2^2)(q^2 - m_3^2)(q^2 - m_4^2)} \\
&= -\frac{1}{m_1^4} \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{x_3 \ln x_3}{(x_3 - 1)(x_3 - x_4)(x_3 - y)} + \frac{x_4 \ln x_4}{(x_4 - 1)(x_4 - x_3)(x_4 - y)} \right]
\end{aligned}$$

¹⁶Von einem sehr groben Standpunkt her gesehen würde man bei der Box mit zwei internen Gluinos den größten Beitrag vermuten, da dieses Diagramm proportional α_S^4 ist und die anderen Diagramme proportional α_{QED}^4 bzw. $\alpha_{\text{QED}}^2 \alpha_S^2$ sind. Selbstverständlich existieren noch weitere unbekannte multiplikative Vorfaktoren, die eventuell einen anderen Schluß zulassen. Man erkennt, daß aufgrund der unbekannten Parameter eine allgemeine Berechnung unter Berücksichtigung aller Diagramme notwendig ist.

$$\left. + \frac{y \ln y}{(y-1)(y-x_3)(y-x_4)} \right] , \quad (292)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^2}{(q^2 - m_1^2)(q^2 - m_2^2)(q^2 - m_3^2)(q^2 - m_4^2)} \\ &= -\frac{1}{m_1^2} \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{x_3^2 \ln x_3}{(x_3-1)(x_3-x_4)(x_3-y)} + \frac{x_4^2 \ln x_4}{(x_4-1)(x_4-x_3)(x_4-y)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y^2 \ln y}{(y-1)(y-x_3)(y-x_4)} \right] \end{aligned} \quad (293)$$

und den Operatoren:

$$\hat{O}_{AB} = [\bar{d} P_A b] [\bar{d} P_B b] \quad , \quad \hat{O}_{AB}^V = [\bar{d} \gamma_\mu P_A b] [\bar{d} \gamma_B^\mu b] \quad . \quad (294)$$

Der Vorfaktor ist gegeben durch: $\mathcal{C} = 4 g_3^4 (\mathbf{T}^a \mathbf{T}^b)_{\alpha\delta} (\mathbf{T}^b \mathbf{T}^a)_{\gamma\beta}$. Die Massenverhältnisse sind wie folgt definiert: $x_3 = m_3^2/m_1^2$, $x_4 = m_4^2/m_1^2$ und $y = m_2^2/m_1^2$. Die Indizes A und B stehen jeweils für L bzw. R . Man stellt fest, daß bereits für dieses einfache Dirac-Diagramm 8 Operatoren existieren. Für den Gluino-Fall mit Massenentartung gelten die folgenden Beziehungen:

$$I'_1 = \lim_{y \rightarrow 1} I_1 = -\frac{1}{m_1^4} \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{(x_3-1)(x_4-1)} + \frac{x_3 \ln x_3}{(x_3-1)^2(x_3-x_4)} + \frac{x_4 \ln x_4}{(x_4-1)^2(x_4-x_3)} \right] , \quad (295)$$

$$I'_2 = \lim_{y \rightarrow 1} I_2 = -\frac{1}{m_1^4} \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{(x_3-1)(x_4-1)} + \frac{x_3^2 \ln x_3}{(x_3-1)^2(x_3-x_4)} + \frac{x_4^2 \ln x_4}{(x_4-1)^2(x_4-x_3)} \right] . \quad (296)$$

Für die Amplitude des Majorana-Diagramms ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_M &= \mathcal{C} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\left[\bar{d} \left(\Gamma_{jd}^{D_L} P_R - \Gamma_{jd}^{D_R} P_L \right) (\not{q} + m_1) C \left(\Gamma_{id}^{D_L} P_R - \Gamma_{id}^{D_R} P_L \right)^T \bar{d} \right]}{(q^2 - m_1^2)(q^2 - m_3^2)} \\ &\quad \times \frac{\left[b \left(\Gamma_{ib}^{D_L} P_L - \Gamma_{ib}^{D_R} P_R \right)^T C^{-1} (\not{q} + m_2) \left(\Gamma_{jb}^{D_L} P_L - \Gamma_{jb}^{D_R} P_R \right) b \right]}{(q^2 - m_2^2)(q^2 - m_4^2)} \\ &= \mathcal{C} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\left[\bar{d} \left(\Gamma_{jd}^{D_L} P_R - \Gamma_{jd}^{D_R} P_L \right) (\not{q} + m_1) \left(\Gamma_{id}^{D_L} P_R - \Gamma_{id}^{D_R} P_L \right) C \bar{d} \right]}{(q^2 - m_1^2)(q^2 - m_3^2)} \\ &\quad \times \frac{\left[b C^+ \left(\Gamma_{ib}^{D_L} P_L - \Gamma_{ib}^{D_R} P_R \right) (\not{q} + m_2) \left(\Gamma_{jb}^{D_L} P_L - \Gamma_{jb}^{D_R} P_R \right) b \right]}{(q^2 - m_2^2)(q^2 - m_4^2)} \\ &= \mathcal{C} I_1 m_1 m_2 \left\{ \Gamma_{jd}^{D_R} \Gamma_{id}^{D_R} \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{jb}^{D_L} \hat{O}'_{LL} + \Gamma_{jd}^{D_L} \Gamma_{id}^{D_L} \Gamma_{ib}^{D_R} \Gamma_{jb}^{D_R} \hat{O}'_{RR} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Gamma_{jd}^{D_R} * \Gamma_{id}^{D_R} * \Gamma_{ib}^{D_R} \Gamma_{jb}^{D_R} \hat{O}'_{LR} + \Gamma_{jd}^{D_L} * \Gamma_{id}^{D_L} * \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{jb}^{D_L} \hat{O}'_{RL} \Big\} \\
& \frac{1}{4} \mathcal{C} I_2 \left\{ \Gamma_{jd}^{D_L} * \Gamma_{id}^{D_R} * \Gamma_{ib}^{D_R} \Gamma_{jb}^{D_L} \hat{O}'_{LL} + \Gamma_{jd}^{D_R} * \Gamma_{id}^{D_L} * \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{jb}^{D_R} \hat{O}'_{RR} \right. \\
& \left. + \Gamma_{jd}^{D_L} * \Gamma_{id}^{D_R} * \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{jb}^{D_R} \hat{O}'_{LR} + \Gamma_{jd}^{D_R} * \Gamma_{id}^{D_L} * \Gamma_{ib}^{D_R} \Gamma_{jb}^{D_L} \hat{O}'_{RL} \right\} ,
\end{aligned} \tag{297}$$

wobei der Vorfaktor $\mathcal{C} = 4 g_3^4 (\mathbf{T}^a \mathbf{T}^b)_{\alpha\delta} (\mathbf{T}^a \mathbf{T}^b)_{\gamma\beta}$ ist.

Die Operatoren besitzen die folgende Gestalt:

$$\hat{O}'_{AB} = [\bar{d} P_A C \bar{d}] [b C^+ P_B b] \quad , \quad \hat{O}'_{AB}^V = [\bar{d} \gamma_\mu A C \bar{d}] [b C^+ \gamma_B^\mu b] \quad . \tag{298}$$

Diese zusätzlichen 8 Operatoren lassen sich durch Fierz-Identitäten auf die bisherigen Operatoren projizieren. Es gilt [75]:

$$\hat{O}'_{LR} = -\frac{1}{2} \hat{O}_{RR}^V \quad , \tag{299}$$

$$\hat{O}'_{RL} = -\frac{1}{2} \hat{O}_{LL}^V \quad , \tag{300}$$

$$\hat{O}'_{LL} = \frac{1}{2} \hat{O}_{LL} - \frac{1}{8} [\bar{d} \sigma_{\mu\nu L} b] [\bar{d} \sigma_L^{\mu\nu} b] \equiv \frac{1}{2} \hat{O}_{LL} - \frac{1}{8} \hat{O}_{LL}^T \quad , \tag{301}$$

$$\hat{O}'_{RR} = \frac{1}{2} \hat{O}_{RR} - \frac{1}{8} [\bar{d} \sigma_{\mu\nu R} b] [\bar{d} \sigma_R^{\mu\nu} b] \equiv \frac{1}{2} \hat{O}_{RR} - \frac{1}{8} \hat{O}_{RR}^T \quad , \tag{302}$$

$$\hat{O}'_{LR}^V = -\hat{O}_{LR}^V \quad , \tag{303}$$

$$\hat{O}'_{RL}^V = -\hat{O}_{RL}^V \quad , \tag{304}$$

$$\hat{O}'_{LL}^V = -2 \hat{O}_{RL} \quad , \tag{305}$$

$$\hat{O}'_{RR}^V = -2 \hat{O}_{LR} \quad . \tag{306}$$

Man beachte, daß aufgrund der Vertauschung von Spinorfeldern, bei der Ableitung obiger Relationen, ein zusätzliches Minuszeichen zu berücksichtigen ist. Mit den folgenden Bezeichnungen:

$$\hat{O}_+^V = \hat{O}_{LL}^V = \hat{O}_{RR}^V \quad , \quad \hat{O}_+ = \hat{O}_{LL} = \hat{O}_{RR} \quad , \tag{307}$$

$$\hat{O}_-^V = \hat{O}_{LR}^V = \hat{O}_{RL}^V \quad , \quad \hat{O}_- = \hat{O}_{LR} = \hat{O}_{RL} \quad , \tag{308}$$

$$\hat{O}^T = \hat{O}_{LL}^T = \hat{O}_{RR}^T \quad , \tag{309}$$

ergibt sich im Gluino-Fall für das zweite Diagramm in Abbildung 16 unter Berücksichtigung des Vorfaktors:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_D = & 4g_3^4 (\mathbf{T}^a \mathbf{T}^b)_{\alpha\delta} (\mathbf{T}^b \mathbf{T}^a)_{\gamma\beta} \\
& \times \left[m_{\tilde{g}}^2 I'_1 \left\{ \left(\Gamma_{jd}^{D_R} * \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{id}^{D_R} * \Gamma_{jb}^{D_L} + R \leftrightarrow L \right) \hat{O}_+ \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2 \Gamma_{jd}^{D_R} * \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{id}^{D_L} * \Gamma_{jb}^{D_R} \hat{O}_- \right\} \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} I'_2 \left\{ \left(\Gamma_{jd}^{D_L} * \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{id}^{D_L} * \Gamma_{jb}^{D_L} + R \rightarrow L \right) \hat{O}_+^V \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2 \Gamma_{jd}^{D_L} * \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{id}^{D_R} * \Gamma_{jb}^{D_R} \hat{O}_-^V \right\} \right] \quad , \tag{310}
\end{aligned}$$

und für das Majorana-Diagramm folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_M = & 4g_3^4 (\mathbf{T}^a \mathbf{T}^b)_{\alpha\delta} (\mathbf{T}^a \mathbf{T}^b)_{\gamma\beta} \\
& \times \left[m_{\tilde{g}}^2 I'_1 \left\{ \left(\Gamma_{jd}^{D_R} * \Gamma_{id}^{D_R} * \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{jb}^{D_L} + R \leftrightarrow L \right) \left(-\frac{1}{2} \hat{O}_+ + \frac{1}{8} \hat{O}^T \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\Gamma_{jd}^{D_R} * \Gamma_{id}^{D_R} * \Gamma_{ib}^{D_R} \Gamma_{jb}^{D_R} + R \rightarrow L \right) \hat{O}_+^V \right\} \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} I'_2 \left\{ 2 \Gamma_{jd}^{D_L} * \Gamma_{id}^{D_R} * \Gamma_{ib}^{D_R} \Gamma_{jb}^{D_L} \hat{O}_- \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2 \Gamma_{jd}^{D_L} * \Gamma_{id}^{D_R} * \Gamma_{ib}^{D_L} \Gamma_{jb}^{D_R} \hat{O}_-^V \right\} \right] \quad . \tag{311}
\end{aligned}$$

Diese beiden Resultate sind in Übereinstimmung mit [76]. Die Ergebnisse können sofort auf den Neutralino- und Chargino-Fall bzw. auf gemischte Diagramme verallgemeinert werden. Mit dieser Verifikation soll dieses Kapitel beschlossen werden. Um diese Ergebnisse mit experimentellen Werten vergleichen zu können, muß die RG-Prozedur angewendet werden. Dazu wird die 1-loop-anomale Dimension der Operatoren benötigt. Für eine Verallgemeinerung auf die NLO-Approximation ist sogar die 2-loop-anomale Dimension erforderlich. Die Rechnungen sind vom analytischen Standpunkt her durchführbar, erfordern jedoch höchste Sorgfalt bei der Handhabung der Ausdrücke. Eine vollständige analytische Berechnung des $B\bar{B}$ -Mixing in NLO-Approximation ist notwendig und stellt eine große Herausforderung dar.

4 Der Zerfall $B \rightarrow X_s \gamma$ in Next-to-Leading-Order Approximation

In diesem Kapitel sollen die Zerfälle $b \rightarrow s \gamma$ und $b \rightarrow s g$ in einer allgemeinen Klasse von Erweiterungen des SM untersucht werden. Mit Hilfe dieser Ergebnisse wird das Verzweigungsverhältnis $BR[B \rightarrow X_s \gamma]$ im MSSM bestimmt. Die Grundlage für dieses Kapitel stellen die Arbeiten [77] und [78] dar, an welche sich streng gehalten wird.

4.1 Einführung

Der seltene Zerfall $B \rightarrow X_s \gamma$ ist ein FCNC-Prozeß mit einem für seltene Zerfälle großen inklusiven Verzweigungsverhältnis von der Ordnung $\mathcal{O}(10^{-4})$. Deshalb ist er gut geeignet für den sensitiven Test des Standard-Modells (SM) und verschiedener Erweiterungen. Die experimentellen Resultate des inklusiven Verzweigungsverhältnisses von CLEO [11]:

$$BR[B \rightarrow X_s \gamma] = (3.15 \pm 0.35_{\text{stat}} \pm 0.32_{\text{syst}} \pm 0.26_{\text{model}}) \times 10^{-4}$$

und ALEPH [12]:

$$BR[B \rightarrow X_s \gamma] = (3.11 \pm 0.80_{\text{stat}} \pm 0.72_{\text{syst}}) \times 10^{-4}$$

sind konsistent mit den theoretischen SM-Erwartungen:

$$BR[B \rightarrow X_s \gamma] = (3.3 \pm 0.30_{\text{theor}}) \times 10^{-4}$$

und führen somit zu einer starken Einschränkung von möglichen Parameterräumen erweiterter Theorien. Die theoretische Vorhersage folgt aus NLO-Rechnungen mit einer theoretischen Unsicherheit von ca 10% und ist somit genauer als das Experiment. Dies wird sich jedoch in naher Zukunft mit dem Beginn der Experimente am SLAC [1] und am KEK [2] ändern.

Die erste NLO-Rechnung zur Bestimmung der Wilson-Koeffizienten im SM erfolgte von Adel und Yao [13] und wurde in [79] bestätigt.

Die Motivation für diese NLO-Rechnung war die Reduktion der großen Skalenunsicherheit in LO-Rechnungen, welche einen theoretischen Fehler von ca. 30% hatten.

In den letzten 2 Jahren wurden die NLO-Rechnungen auf des 2HDM, Links-Rechts-Modelle und das MSSM erweitert [77, 80, 81].

In allen Rechnungen wurde gezeigt, daß die QCD-Korrekturen große Beiträge liefern. Dieser Sachverhalt kann u. a. mit verantwortlich gemacht werden für das relativ große inklusive Verzweigungsverhältnis.

Das prinzipielle theoretische Herangehen erfolgt wie in Kapitel 3. Es muß jedoch festgestellt werden, daß die technischen Schwierigkeiten viel größer sind als bei der $B\bar{B}$ -Oszillation. Die hier betrachteten Diagramme sind bereits in der niedrigsten Ordnung der Störungstheorie divergent, so daß bei der Berücksichtigung der QCD-Korrekturen überlappende Divergenzen auftreten. Desweiteren muß man bis zur zweiten Ordnung in den äußeren Impulsen entwickeln, was zu

einer großen Anzahl von Operatoren führt (siehe dazu Anhang G.1).

Die hier präsentierten Rechnungen für die Bestimmung der Wilson-Koeffizienten werden im Free-Quark-Modell durchgeführt, d. h., es werden die Prozesse $b \rightarrow s \gamma$ und $b \rightarrow s g$ berechnet. Für die externen Bosonen (γ, g) wird die Hintergrundfeldeichung gewählt. Desweiteren wird die Feynman-'t Hooft-Eichung für das W -Boson benutzt, wodurch die Einführung eines unphysikalischen, skalaren Feldes ϕ erforderlich ist. Die Ultraviolett- und Infrarot-Divergenzen werden simultan dimensional regularisiert. Dies macht die Unterscheidung beider Arten von Divergenzen unmöglich, vereinfacht jedoch die Rechnung drastisch, da die leichten Freiheitsgrade (leichte Quarks) masselos angenommen werden. Die Unterscheidung zwischen UV- und IR-Divergenzen ist nicht nötig, da nach der Renormierung die Restdivergenzen automatisch IR-Divergenzen sind. Vom mathematischen Standpunkt betrachtet ist die Unterscheidung sogar fragwürdig, da z. B. suspekte Terme $\varepsilon_{UV}/\varepsilon_{IR}$ auftreten würden.

Das Matchen der vollen und der effektiven Seite erfolgt off-shell. Der Vorteil dieses Verfahrens besteht in der Anwendbarkeit der Taylor-Reihe bei der Entwicklung nach den äußeren Impulsen, und man umgeht die Notwendigkeit einer asymptotischen Entwicklung [82]. Für die hier zu behandelnden Zerfälle kann deshalb die folgende allgemeine Taylor-Entwicklung nach den zwei äußeren Impulsen k und p verwendet werden:

$$\frac{1}{(\alpha k + \beta p + q)^2 - m^2} \approx \frac{1}{q^2 - m^2} - \frac{(\alpha k + \beta p)^2 + 2(\alpha k + \beta p) \cdot q}{(q^2 - m^2)^2} + \frac{4[(\alpha k + \beta p) \cdot q]^2}{(q^2 - m^2)^3} , \quad (312)$$

wobei $\alpha, \beta = \pm 1$ sein können. Der Nachteil des off-shell-Matchens ist eine wesentlich erweiterte Operatorbasis (siehe Anhang G.1). Somit spielen beim Matchen nicht nur die beiden physikalischen Operatoren:

$$\hat{P}_7 = \frac{e}{16\pi^2} m_b (\bar{s} \sigma_{\mu\nu} P_R b) F^{\mu\nu} \quad \text{bzw.} \quad (313)$$

$$\hat{P}_8 = \frac{g_3}{16\pi^2} m_b (\bar{s} \sigma_{\mu\nu} P_R \mathbf{T}^a b) G^{a,\mu\nu} \quad (314)$$

für die Zerfälle $b \rightarrow s \gamma$ bzw. $b \rightarrow s g$ eine Rolle, sondern ebenso unphysikalische (bewegungsgleichungsverschwindende bzw. EOM-verschwindende) Operatoren. Diesem Nachteil steht jedoch die Möglichkeit der Durchführung verschiedener Tests (Gauge-Invarianz-Tests) gegenüber, die nur im off-shell Fall anwendbar sind und somit die Rechnung sicherer machen.

Die effektive Hamilton-Dichte hat die folgende Gestalt:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{ts}^* V_{tb} \sum C_i \hat{P}_i . \quad (315)$$

Die Berechnung der Wilson-Koeffizienten C_i erfolgt durch das Gleichsetzen der renormierten 1-Teilchen irreduziblen Green-Funktionen der vollen und effektiven Theorie. Dabei ist die Bestimmung der C_i im Free-Quark-Modell möglich, da sie unabhängig von den externen Zuständen

in den Matrixelementen sind. Die zu berechnenden Diagramme in niedrigster Ordnung der Störungstheorie für den Prozeß $b \rightarrow s\gamma$ innerhalb der vollen Theorie sind in Abbildung 17 dargestellt.

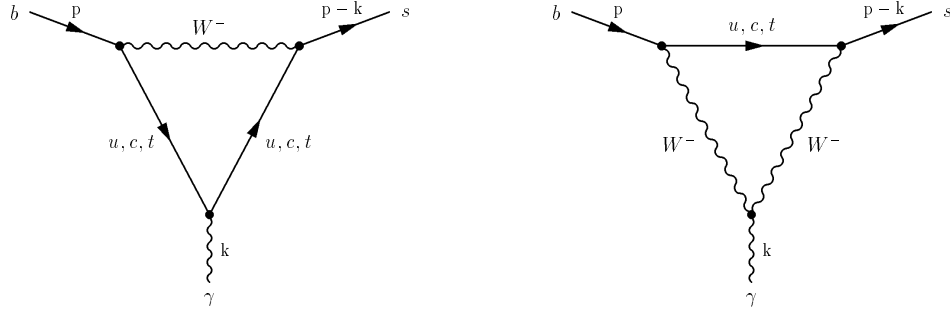


Abbildung 17: Diagramme für den Prozeß $b \rightarrow s\gamma$ im SM. Zusätzlich müssen noch Diagramme mit einem would-be-Goldstone-Boson ϕ in Rechnung gestellt werden, welche durch den Austausch $W \leftrightarrow \phi$ entstehen.

Hier taucht das W -Boson, das unphysikalische Skalar ϕ und das top-Quark explizit als dynamischer Freiheitsgrad auf. Die Diagramme der effektiven Theorie sind in Abbildung 18 zu finden.

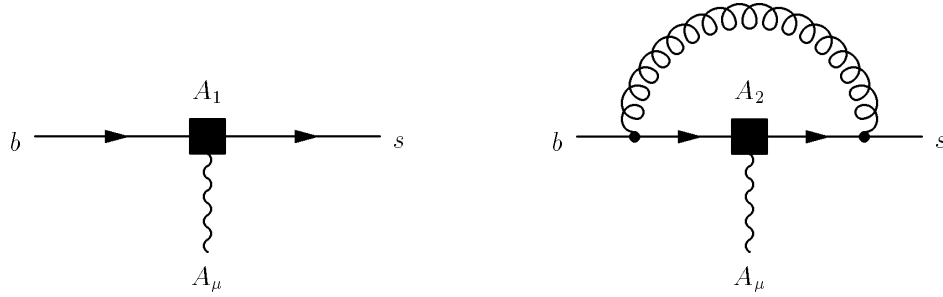


Abbildung 18: Diagramme für den Prozeß $b \rightarrow s\gamma$ innerhalb der effektiven Theorie. Die schwarzen Vierecke mit den Bezeichnungen A_i sind Kopplungen der effektiven Theorie.

In der effektiven Theorie sind die schweren Felder ausintegriert und implizit in den effektiven Kopplungen (dargestellt als schwarze Vierecke in Abbildung 18) enthalten. Es ist offensichtlich, daß die effektive Seite für das SM und alle hier präsentierten Erweiterungen identisch ist, da sich die Erweiterungen nur durch zusätzliche schwere Freiheitsgrade vom SM unterscheiden.

Durch die Entwicklung nach äußeren Impulsen bis zur 2. Ordnung entsteht eine große Anzahl von Termen, die die Anwendung von Computer-Algebra-Programmen erfordern. Zur Generierung der Feynman-Amplituden wurde *FeynArts* [66] benutzt. Mit Hilfe von *Mathematica* [67] wurden diese Amplituden ausgewertet.

Ziel dieses Kapitels soll die Präsentation der Berechnung der Wilson-Koeffizienten für den Zerfall $b \rightarrow s\gamma$ und $b \rightarrow sg$ in Next-to-Leading-Order-Approximation im SM und einer allgemeinen

Klasse von möglichen Erweiterungen (2HDM, Links-Rechts-Modelle, MSSM) sein. Im folgenden werden die Matching-Bedingungen für Diagramme mit allgemeinen schweren Fermionen und schweren skalaren Teilchen, sowie Diagramme mit allgemeinen schweren Fermionen und schweren Vektor-Bosonen abgeleitet. Zusätzlich müssen im SM noch Diagramme mit schweren Vektor-Bosonen und leichten Fermionen berücksichtigt werden. Aus den daraus resultierenden generischen Gleichungen lassen sich durch simple Substitutionen die bisher bekannten Ergebnisse für das SM, 2HDM, Links-Rechts-Modelle und das MSSM reproduzieren [13, 79, 80]. Die Wilson-Koeffizienten werden im Anschluß von der Matching-Skala M_W zu $\mu_b = 4.8 \text{ GeV}$ skaliert. Die daraus erhaltenen Ausdrücke gehen direkt in die Berechnung des experimentell ermittelbaren Verzweigungsverhältnisses $BR[B \rightarrow X_S \gamma]$ ein.

4.2 Generische Gleichungen für eine allgemeine Klasse von renormierbaren Quantenfeldtheorien

In diesem Gliederungspunkt sollen Einschleifen- und Zweischleifen-Beiträge zum Matching für den Prozeß $b \rightarrow s \gamma$ und $b \rightarrow s g$ in einer allgemeinen Quantenfeldtheorie berechnet werden. Es wird eine Unterteilung in zwei Fälle vorgenommen, im ersten Fall werden Schleifen mit schweren Fermionen und schweren skalaren Teilchen betrachtet, wohingegen im zweiten Fall schwere Fermionen und schwere Vektor-Bosonen eine Rolle spielen.

4.2.1 Diagramme mit schweren skalaren Teilchen und schweren Fermionen

Die im ersten Teil zugrunde liegende Lagrange-Dichte hat die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\text{QCD} \times \text{QED}}(u, d, s, c, b) + (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + \bar{\psi}(i \not{D} - m_\psi) \psi \\ & + \left\{ C_{ijk} \phi_i^* \bar{\psi}_j [(S_L P_L + S_R P_R) s_k + (B_L P_L + B_R P_R) b_k] + h.c. \right\} + \mathcal{L}_{\text{irrelevant}} \quad . \end{aligned} \quad (316)$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{L}_{\text{QCD} \times \text{QED}}(u, d, s, c, b)$ die kinetischen Terme der leichten Quarks, sowie der Photonen und Gluonen. Die Eich-Wechselwirkungsterme sind ebenfalls in $\mathcal{L}_{\text{QCD} \times \text{QED}}(u, d, s, c, b)$ enthalten. Die skalaren Teilchen werden mit ϕ bezeichnet und die Fermionen mit ψ . Der Term $\mathcal{L}_{\text{irrelevant}}$ beinhaltet Kopplungen und Felder, die für die hier betrachteten Prozesse nicht relevant sind. Die kovarianten Ableitungen haben die Gestalt:

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &= \left[\partial_\mu + i g_3 G_\mu^a \mathbf{T}_{(\psi)}^a + i e Q_\psi A_\mu \right] \psi \quad , \\ D_\mu \phi &= \left[\partial_\mu + i g_3 G_\mu^a \mathbf{T}_{(\phi)}^a + i e Q_\phi A_\mu \right] \phi \quad . \end{aligned} \quad (317)$$

Die Kopplungen $S_{L,R}$ und $B_{L,R}$ in (316) parametrisieren die Yukawa-Wechselwirkungen der schweren Teilchen mit den s - und b -Quarks. Wie üblich sind die einzelnen Summanden in der Lagrange-Dichte QED- und QCD-Singletts. Da eine allgemeine Theorie betrachtet werden soll, können sich die schweren Teilchen in jeder beliebigen Darstellung der $SU(3)_C$ befinden, für die derartige Singletts existieren. Für die hier zu behandelnden Prozesse gelten die folgenden Gauge-Invarianz-Bedingungen bzgl. der $U(1)_Q$ und der $SU(3)_C$:

$$\begin{aligned}
Q_\psi + Q_\phi &= -\frac{1}{3} \quad , \\
\mathbf{T}_{(\psi)jn}^a C_{ink} + \mathbf{T}_{(\phi)in}^a C_{njk} &= C_{ijn} \mathbf{T}_{nk}^a \quad ,
\end{aligned} \tag{318}$$

wobei die C_{ijk} Clebsch-Gordan Koeffizienten sind. Der Generator der fundamentalen Darstellung der $SU(3)_C$ wird mit \mathbf{T}^a bezeichnet, wohingegen die Generatoren beliebiger Darstellungen durch $\mathbf{T}_{(\phi)in}^a$ und $\mathbf{T}_{(\psi)jn}^a$ abgekürzt werden. Selbstverständlich erfüllen alle Generatoren die Standard-Kommutationsrelationen:

$$\left[\mathbf{T}_{(\psi)}^a, \mathbf{T}_{(\psi)}^b \right] = if_{abc} \mathbf{T}_{(\psi)}^c \quad , \quad \left[\mathbf{T}_{(\phi)}^a, \mathbf{T}_{(\phi)}^b \right] = if_{abc} \mathbf{T}_{(\phi)}^c \quad , \quad \left[\mathbf{T}^a, \mathbf{T}^b \right] = if_{abc} \mathbf{T}^c \quad . \tag{319}$$

Die Casimir-Eigenwerte für die Darstellungen der schweren Teilchen werden κ_ψ und κ_ϕ genannt:

$$\mathbf{T}_{(\psi)}^a \mathbf{T}_{(\psi)}^a = \kappa_\psi \mathbf{1} \quad , \quad \mathbf{T}_{(\phi)}^a \mathbf{T}_{(\phi)}^a = \kappa_\phi \mathbf{1} \quad . \tag{320}$$

Für die Standard-Darstellung gilt $\kappa = 4/3$. Innerhalb dieser Arbeit wird vorausgesetzt, daß die Yukawa-Kopplungen und α_{em} schwach sind. Es ist damit ausreichend, diese Kopplungen in LO-Approximation zu behandeln, jedoch in NLO-Approximation bezüglich der starken Kopplungskonstante α_S zu rechnen. Diese Annahmen sind nicht von allgemeiner Gültigkeit. Sie müssen für jedes Modell und für jeden Prozeß individuell untersucht werden. Insbesondere die top-Quark-Yukawa-Kopplung Y_t im Standardmodell und die quartische Higgs-Kopplung λ kann von der gleichen Stärke sein wie die starke Kopplung und somit nicht verschwindende numerische Beiträge liefern. In Ref. [83] wurde explizit verifiziert, daß für $b \rightarrow s\gamma$ diese Beiträge keine Rolle spielen. Die $\mathcal{O}(Y_t, \lambda)$ -Korrekturen geben im Standardmodell ca. 1% Korrekturen.

Die in diesem Kapitel zu untersuchenden Diagramme sind im Anhang G.2 gegeben. Es folgt hierbei insbesondere im 2-loop-Fall eine Beschränkung auf Diagramme mit Gluonen. Zu einem späteren Zeitpunkt werden noch wichtige zusätzliche Beiträge, die von Diagrammen ohne Gluonen aber mit 4-Squark-Kopplungen stammen, bestimmt (Anhang G.4). Die Diagramme müssen vor der Berechnung der effektiven Seite renormiert werden. Alle zu renormierenden Größen werden im \overline{MS} -Schema behandelt. Der Renormierungspunkt wird mit $\mu_0 = \mathcal{O}(\text{schwere Massen})$ bezeichnet. Die übrigbleibenden Divergenzen sind dann IR-Divergenzen und repräsentieren somit das kurzreichweitige Verhalten der Theorie. Da diese Beiträge ebenso auf der effektiven Seite vorhanden sind (volle Theorie ist im Niederenergie-Limes identisch mit der effektiven Theorie), heben sich diese Divergenzen bei der Matching-Prozedur auf. Dies gilt auch für die durch die Entwicklung entstandenen künstlichen IR-Divergenzen, was jedoch voraussetzt, daß die äußeren Impulse in der vollen und effektiven Theorie gleich behandelt werden müssen.

Der nächste Schritt besteht nun in der Berechnung der effektiven Theorie. Der Ansatz für die effektive Lagrange-Dichte ergibt sich aus der Dirac-Struktur der vollen Theorie:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{QCD} \times \text{QED}}(u, d, s, c, b) + \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{ts}^* V_{tb} \left[\sum_{i=4,7,8} (C_i \hat{P}_i + C'_i \hat{P}'_i) + \left(\begin{array}{c} \text{EOM-verschwin-} \\ \text{dende Operatoren} \end{array} \right) \right] \quad , \tag{321}$$

wobei die Operatoren \hat{P}_i in [77] bzw. im Anhang G.1 aufgelistet sind. Die Operatoren \hat{P}'_i erhält man durch den Austausch der Projektionsoperatoren $P_{L/R} \rightarrow P_{R/L}$.

Zwei typische Diagramme zur Berechnung der effektiven Seite sind in Abbildung 18 dargestellt. Die leichten Felder, insbesondere alle Quarks außer dem t-Quark, sind masselos. Aus diesem Grund verschwinden alle Schleifendiagramme auf der effektiven Seite (siehe dazu Gleichung (549)) und die komplette effektive Theorie besteht aus tree-Level-Ausdrücken. Der Operator \hat{P}_7 soll als Beispiel für die Berechnung innerhalb der effektiven Theorie herangezogen werden. Um mit den Ergebnissen von Ref. [78] vergleichen und um die dortige Matrix der anomalen Dimension benutzen zu können, wird die folgende Umnormierung $\hat{P}_{7,8} \rightarrow 1/g_3^2 \hat{P}_{7,8}$ vorgenommen. Der relevante Teil der Lagrange-Dichte, mit renormierten Größen ausgedrückt, lautet:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{P_7} = Z_\psi Z_g^{-2} \left(Z_m \sum_k C_k Z_{k7} + (Z_m - 1) \sum_k C_k Z_{k35} \right) \hat{P}_7 \quad , \quad (322)$$

wobei der letzte Term entsteht, weil der Operator \hat{P}_{35} den Operator \hat{P}_7 enthält. Die Renormierungskonstanten Z_ψ , Z_g , Z_m und Z_{ij} repräsentieren die Wellenfunktions-, Kopplungskonstanten, Massen- und Operatorrenormierung. Diese Größen sind gegeben [15, 78, 84]:

$$\begin{aligned} Z_g &= 1 + \frac{g_3^2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \left(-\frac{1}{2} \beta_0 \right) + \mathcal{O}(g_3^4) \quad \text{mit } \beta_0 = \frac{23}{3} \quad , \\ Z_m &= 1 + \frac{g_3^2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \left(-\frac{1}{2} \gamma_m^{(0)} \right) + \mathcal{O}(g_3^4) \quad \text{mit } \gamma_m^{(0)} = 8 \quad , \\ Z_\psi &= 1 + \frac{g_3^2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \left(\gamma_\psi^{(0)} \right) + \mathcal{O}(g_3^4) \quad \text{mit } \gamma_\psi^{(0)} = \frac{4}{3} \quad , \\ Z_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{g_3^2}{(4\pi)^2} \left[a_{ij}^{01} + \frac{1}{\varepsilon} a_{ij}^{11} \right] + \frac{g_3^4}{(4\pi)^4} \left[a_{ij}^{02} + \frac{1}{\varepsilon} a_{ij}^{12} + \frac{1}{\varepsilon^2} a_{ij}^{22} \right] + \mathcal{O}(g_3^6) \quad . \end{aligned} \quad (323)$$

Die Bestimmung der Renormierungskonstanten erfolgt durch die Berechnung der UV-divergenten Anteile von Feynman-Diagrammen auf der effektiven Seite. Deshalb muß man die UV- und IR-Divergenzen trennen. Dies wird möglich durch die Einführung eines gemeinsamen Massenregulators für die leichten Felder [71].

Für den Vektor Z_{k7} gilt: $Z_{k7} = 0$, wenn \hat{P}_k ein bewegungsgleichungsverschwindender Operator ist, da diese nicht in physikalische Operatoren mischen können. Weiterhin sind alle Operatoren, die beim Matching auf Einschleifen-Niveau keine Beiträge erhalten¹⁷, irrelevant. Dies gilt insbesondere für evanescente Operatoren (somit ist a_{i7}^{01} und a_{i7}^{02} identisch Null). Die Wellenfunktionsrenormierung ist auf der effektiven und der vollen Seite identisch und stellt einen globalen Vorfaktor dar. Konsequenterweise kann man diese Renormierung auf beiden Seiten weglassen,

¹⁷Tree-Level-Beiträge sind in dem hier behandelten Fall (Diagramme mit schweren Fermionen und schweren Bosonen) von vornherein nicht vorhanden.

was bedeutet, daß $Z_\psi = 1$ ist. Dasselbe gilt für die Massenrenormierung von m_b , jedoch nicht für die Renormierung der Kopplungskonstanten. Mit Hilfe von [15, 78, 84]:

$$a_{77}^{11} = \frac{16}{3} - \beta_0 \quad , \quad a_{87}^{11} = -\frac{16}{9} \quad , \quad \text{alle anderen } a_{ij}^{11} = 0 \quad , \quad (324)$$

erhält man das Ergebnis:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{P_7} = \frac{g^2}{16\pi^2} C_7^{(1)} \hat{P}_7 + \frac{g^4}{(16\pi^2)^2} \left[C_7^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon} a_{87}^{11} C_8^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} (a_{77}^{11} + \beta_0) C_7^{(1)} \right] \hat{P}_7 \quad . \quad (325)$$

Für Details, insbesondere das Matching des Operators \hat{P}_8 wird auf die Ref. [78] verwiesen. Der Übergang von dem soeben benutzten \hat{P}_7 zu dem im Anhang G.1 definierten erfolgt nun ganz einfach durch das Streichen von g_3^2 in der letzten Gleichung.

Für die Wilson-Koeffizienten gilt:

$$C_i(\mu_0) = C_i^{(0)}(\mu_0) + \frac{\alpha_S(\mu_0)}{4\pi} C_i^{(1)}(\mu_0) + \dots \quad (i = 4, 7, 8) \quad , \quad (326)$$

wobei die einzelnen Summanden der Entwicklung durch die folgenden Funktionen in $x = (m_\psi/m_\phi)^2$ repräsentiert werden:

$$C_4^{(0)}(\mu_0) = 0 \quad , \quad (327)$$

$$C_7^{(0)}(\mu_0) = N \left\{ R_1 \left[g_1(x) Q_\psi - \frac{1}{x} g_1 \left(\frac{1}{x} \right) Q_\phi \right] + R_2 \left[g_2(x) Q_\psi + \left(x g_2(x) + \frac{1}{2} \right) Q_\phi \right] \right\} \quad , \quad (328)$$

$$C_8^{(0)}(\mu_0) = N \left\{ R_1 \left[\frac{3}{8} (\kappa_\psi - \kappa_\phi) \left(g_1(x) + \frac{1}{x} g_1 \left(\frac{1}{x} \right) \right) + \frac{1}{2} g_1(x) - \frac{1}{2x} g_1 \left(\frac{1}{x} \right) \right] + R_2 \left[\frac{3}{8} (\kappa_\psi - \kappa_\phi) \left((1-x) g_2(x) - \frac{1}{2} \right) + \frac{x+1}{2} g_2(x) + \frac{1}{4} \right] \right\} \quad , \quad (329)$$

$$C_4^{(1)}(\mu_0) = N S_L^* B_L [(\kappa_\phi - \kappa_\psi) f_1(x) + f_2(x)] \quad , \quad (330)$$

$$C_7^{(1)}(\mu_0) = 3 \ln \frac{\mu_0^2}{m_\phi^2} \left[(2\kappa_\psi - \kappa_\phi) x \left(\frac{\partial C_7^{(0)}}{\partial x} \right)_{\text{S,B}} + \left(\frac{28}{9} + \kappa_\psi - \kappa_\phi \right) C_7^{(0)} + \left(\kappa_\psi - \frac{4}{3} \right) C_7^{(0)\text{LR}} - \frac{16}{27} C_8^{(0)} \right] + N \{ R_1 [(h_1(x)\kappa_\psi + h_2(x)\kappa_\phi + h_3(x)) Q_\psi + (h_4(x)\kappa_\psi + h_5(x)\kappa_\phi + h_6(x)) Q_\phi] + R_2 [(h_7(x)\kappa_\psi + h_8(x)\kappa_\phi + h_9(x)) Q_\psi + (h_{10}(x)\kappa_\psi + h_{11}(x)\kappa_\phi + h_{12}(x)) Q_\phi] \} \quad , \quad (331)$$

$$\begin{aligned}
C_8^{(1)}(\mu_0) = & 3 \ln \frac{\mu_0^2}{m_\phi^2} \left[(2\kappa_\psi - \kappa_\phi)x \left(\frac{\partial C_8^{(0)}}{\partial x} \right)_{S,B} + \left(\frac{26}{9} + \kappa_\psi - \kappa_\phi \right) C_8^{(0)} + \left(\kappa_\psi - \frac{4}{3} \right) C_8^{(0)LR} \right] \\
& + N \left\{ R_1 \left[h_{13}(x)\kappa_\psi^2 + h_{14}(x)\kappa_\phi^2 + h_{15}(x)\kappa_\psi\kappa_\phi + h_{16}(x)\kappa_\psi + h_{17}(x)\kappa_\phi + h_{18}(x) \right] \right. \\
& \left. + R_2 \left[h_{19}(x)\kappa_\psi^2 + h_{20}(x)\kappa_\phi^2 + h_{21}(x)\kappa_\psi\kappa_\phi + h_{22}(x)\kappa_\psi + h_{23}(x)\kappa_\phi + h_{24}(x) \right] \right\} \quad , \quad (332)
\end{aligned}$$

mit

$$R_1 = S_L^* B_L + \frac{m_s}{m_b} S_R^* B_R \quad \text{und} \quad R_2 = S_L^* B_R \frac{m_\psi}{m_b} \quad (333)$$

und dem globalen Vorfaktor:

$$N = \frac{\xi \sqrt{2}}{8 m_\phi^2 G_F V_{ts}^* V_{tb}} \quad . \quad (334)$$

Hierbei ist ξ die Kontraktion der Clebsch-Gordan Koeffizienten:

$$C_{ijk}^* C_{ijn} = \xi \delta_{kn} \quad . \quad (335)$$

Die gestrichenen Wilson-Koeffizienten erhält man durch den Austausch der Chiralitätsindizes $L \leftrightarrow R$.

Die expliziten Ausdrücke für Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ und $h_1(x)$ – $h_{24}(x)$ sind im Anhang G.3 gegeben.

Die Symbole $C_i^{(0)LR}$ bezeichnen diejenigen Teile der LO-Funktion $C_i^{(0)}$, welche proportional zu $S_L^* B_R$ sind. Die Subskripte „S, B“ an den Ableitungen deuten an, daß bei Ableitung nach x die Ausdrücke $S_L^* B_L$, $S_R^* B_R$ und $S_L^* B_R \frac{m_\psi}{m_b}$ als unabhängig von x anzusehen sind.

Eine interessante Beobachtung ist die Tatsache, daß die Farbfaktoren der Zweischleifen-Diagramme auf eine sehr einfache Form gebracht werden konnten, obwohl die speziellen Darstellungen der $SU(3)_C$ für die schweren Teilchen nicht festgelegt worden sind. Die dafür notwendigen Beziehungen sind im Anhang D zusammengefaßt.

4.2.2 Diagramme mit schweren Vektor-Bosonen und schweren Fermionen

Im weiteren wird der bereits angesprochene zweite Fall diskutiert. Da dieser nur für das SM und das Links-Rechts-Modell notwendig ist, wird sich auf schwere QCD-Singlett Vektor-Bosonen V_μ und schwere Fermionen ψ in der fundamentalen Darstellung der $SU(3)_C$ beschränkt. Die Lagrange-Dichte hat die Gestalt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\text{QCD} \times \text{QED}}(u, d, s, c, b) - (D_\mu V_\nu)^* (D^\mu V^\nu) + m_V^2 V_\mu^* V^\mu + i e \omega V_\mu^* V_\nu F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \not{D} - m_\psi) \psi \\
& + \left\{ V_\mu^* \bar{\psi} \gamma^\mu [(\sigma_L P_L + \sigma_R P_R) s + (\beta_L P_L + \beta_R P_R) b] + h.c. \right\} + \mathcal{L}_{\text{irrelevant}} \quad , \quad (336)
\end{aligned}$$

wobei $F^{\mu\nu}$ der elektromagnetische Feldstärke-Tensor ist. Die kovariante Ableitung lautet:

$$D_\mu V_\nu = (\partial_\mu + i e Q_V A_\mu) V_\nu \quad \text{mit} \quad Q_V = -Q_\psi - \frac{1}{3} \quad . \quad (337)$$

Die Konstanten $\sigma_{L,R}$ und $\beta_{L,R}$ repräsentieren beliebige, jedoch schwache Kopplungen. Das SM ergibt sich mit den folgenden Substitutionen in Gleichung (336):

$$\begin{aligned} V &\rightarrow W \quad , \quad \psi \rightarrow t \quad , \\ Q_V &\rightarrow -1 \quad , \quad \omega \rightarrow -2 \quad , \\ \sigma_R, \beta_R &\rightarrow 0 \quad , \quad \sigma_L \rightarrow -\frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{ts} \quad , \quad \beta_L \rightarrow -\frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{tb} \quad . \end{aligned}$$

Die einzige Erweiterung gegenüber dem SM ist die Möglichkeit der rechtshändigen Kopplung der schweren Vektor-Bosonen an Fermionen (siehe hierzu die Ausführungen zum Links-Rechts-Modell in 2.3.2). Diese Beiträge sind im allgemeinen unterdrückt. Sie können jedoch durch das große Verhältnis m_t/m_b numerisch nicht vernachlässigbare Beiträge für $B \rightarrow X_s \gamma$ liefern [39, 85]. Die zu berechnenden Diagramme sind im Anhang G.2 dargestellt. Es gibt 16 Diagramme für den Prozeß $b \rightarrow s \gamma$ und ebensoviele für $b \rightarrow s g$. Die effektive Lagrange-Dichte wurde bereits in Gleichung (321) gegeben.

Die Beiträge zu den Wilson-Koeffizienten lauten:

$$C_4^{(0)}(\mu_0) = 0 \quad , \quad (338)$$

$$\begin{aligned} C_7^{(0)}(\mu_0) &= \tilde{N} \left[\left(\sigma_L^* \beta_L + \frac{m_s}{m_b} \sigma_R^* \beta_R \right) (j_1(x) Q_\psi + j_2(x) Q_V + j_3(x) \omega) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_L^* \beta_R \frac{m_\psi}{m_b} (j_4(x) (Q_\psi + Q_V) + j_5(x) \omega) \right] \quad , \end{aligned} \quad (339)$$

$$C_8^{(0)}(\mu_0) = \tilde{N} \left[\left(\sigma_L^* \beta_L + \frac{m_s}{m_b} \sigma_R^* \beta_R \right) j_1(x) + \sigma_L^* \beta_R \frac{m_\psi}{m_b} j_4(x) \right] \quad , \quad (340)$$

$$C_4^{(1)}(\mu_0) = \tilde{N} \sigma_L^* \beta_L \left[\frac{-12x^2 + 18x - 4}{3(1-x)^4} \ln x + \frac{-25x^2 + 29x + 2}{9(1-x)^3} \right] \quad , \quad (341)$$

$$\begin{aligned} C_7^{(1)}(\mu_0) &= \ln \frac{\mu_0^2}{m_V^2} \left[8x \left(\frac{\partial C_7^{(0)}}{\partial x} \right)_{\sigma, \beta} + \frac{16}{3} C_7^{(0)} - \frac{16}{9} C_8^{(0)} \right] \\ &\quad + \tilde{N} \left[\left(\sigma_L^* \beta_L + \frac{m_s}{m_b} \sigma_R^* \beta_R \right) (k_1(x) Q_\psi + k_2(x) Q_V + k_3(x) \omega) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_L^* \beta_R \frac{m_\psi}{m_b} (k_4(x) Q_\psi + k_5(x) Q_V + k_6(x) \omega) \right] \quad , \end{aligned} \quad (342)$$

$$\begin{aligned} C_8^{(1)}(\mu_0) &= \ln \frac{\mu_0^2}{m_V^2} \left[8x \left(\frac{\partial C_8^{(0)}}{\partial x} \right)_{\sigma, \beta} + \frac{14}{3} C_8^{(0)} \right] \\ &\quad + \tilde{N} \left[\left(\sigma_L^* \beta_L + \frac{m_s}{m_b} \sigma_R^* \beta_R \right) k_7(x) + \sigma_L^* \beta_R \frac{m_\psi}{m_b} k_8(x) \right] \quad . \end{aligned} \quad (343)$$

Die Koeffizienten der gestrichenen Operatoren ergeben sich erneut durch den Austausch von L und R an den Kopplungen σ und β . Der globale Normierungsfaktor lautet:

$$\tilde{N} = \frac{\sqrt{2}}{8m_V^2 G_F V_{ts}^* V_{tb}} \quad . \quad (344)$$

Die Funktionen $j_1(x)$ – $j_5(x)$ und $k_1(x)$ – $k_8(x)$ sind im Anhang G.3 gegeben.

4.2.3 Diagramme mit schweren Vektor-Bosonen und leichten Fermionen

Ein weiterer Beitrag, auf den bisher noch nicht eingegangen wurde, der jedoch für die Berechnung eines kompletten Resultats notwendig ist, stammt von Schleifen mit schweren Vektor-Bosonen und leichten Quarks.

Im SM handelt es sich hierbei um Diagramme mit W -Bosonen und c -Quarks. Diagramme mit u -Quarks sind analog zu berechnen, jedoch wegen dem kleinen Wert von V_{ub} numerisch nicht relevant.

Dieser Paragraph ist nur für das SM relevant. Im 2HDM und im MSSM existieren zusätzlich zum SM keine weiteren Vektor-Bosonen und die Kopplungen der schweren skalaren Teilchen an leichte Fermionen sind durch die kleinen Yukawa-Kopplungskonstanten unterdrückt. Ein weiterer Beitrag wäre im Links-Rechts-Modell zu erwarten, in dem das W -Boson rechtshändig an Quarks koppelt. Derartige Beiträge sind jedoch nicht verstärkt durch das große Verhältnis m_t/m_b [39, 77] für den Prozeß $b \rightarrow s \gamma$ bzw. $b \rightarrow s g$ und sind somit vernachlässigbar¹⁸.

Die zu berechnenden Diagramme sind ebenfalls in Anhang G.2 dargestellt, allerdings muß nun das Fermion durch ein leichtes Quark ersetzt werden und das Boson ist in jedem Fall ein W -Boson. Die effektive Theorie ist wesentlich komplizierter und soll hier kurz skizziert werden.

Es müssen Operatoren berücksichtigt werden, welche leichte Quarks enthalten. Für den c -Quark-Sektor haben diese Operatoren die Gestalt:

$$\begin{aligned} \hat{P}_1^c &= (\bar{s} \gamma_\mu P_L \mathbf{T}^a c)(\bar{c} \gamma^\mu P_L \mathbf{T}^a b) \quad , \\ \hat{P}_2^c &= (\bar{s} \gamma_\mu P_L c)(\bar{c} \gamma^\mu P_L b) \quad . \end{aligned} \quad (345)$$

Die Wilson-Koeffizienten erhält man, wenn man die $\bar{s}b\bar{c}c$ Greens-Funktion bestimmt (siehe dazu auch [78]). Die zu berechnenden 1-loop- und 2-loop-Diagramme sind in Abbildung 19 zusammengefaßt.

Das Diagramm a) in Abbildung 19 kann aufgrund der nicht vorhandenen Farbstruktur nur zum Operator \hat{P}_2^c einen Beitrag leisten, wohingegen die Diagramme b) und c) nur zum Wilson-Koeffizienten des Operators \hat{P}_1^c beitragen. Die Rechnung ist besonders einfach, da man die

¹⁸Sobald die rechtshändige CKM-Matrix eine vollkommen andere Hierarchie erzwingt, könnten numerisch relevante zusätzliche Beiträge im Links-Rechts-Modell entstehen. Dies wird hier jedoch nicht angenommen.

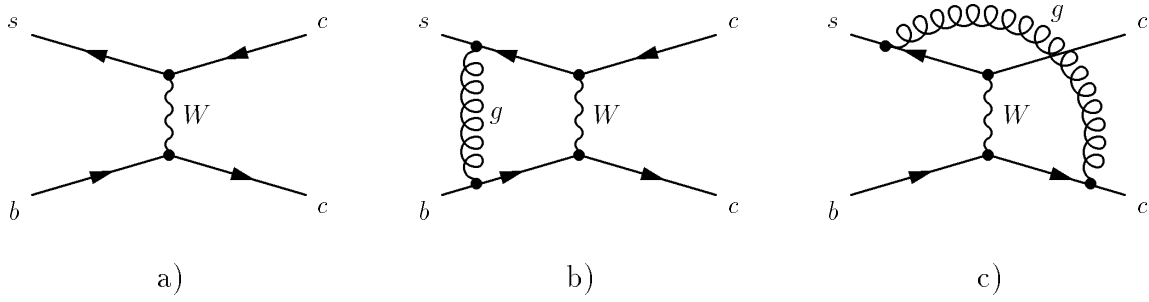


Abbildung 19: 1-loop- und 2-loop-Diagramme zum Prozeß $b \rightarrow s \bar{c} c$, wobei zusätzlich die symmetrischen 2-loop-Diagramme betrachtet werden müssen. Diagramme, in denen das Gluon an die äußeren Beine eines Fermi-Stromes koppelt, verschwinden, da die leichten Quarks als masselos zu betrachten sind.

äußeren Impulse und die Massen der Quarks identisch Null annehmen kann. Die sich ergebenden Wilson-Koeffizienten lauten [78]:

$$\begin{aligned} C_1^{(0)}(\mu_0) &= 0 \quad , & C_2^{(0)}(\mu_0) &= r_{ct} \quad , \\ C_1^{(1)}(\mu_0) &= \left[-15 - 6 \ln \frac{\mu_0^2}{M_W^2} \right] r_{ct} \quad , & C_2^{(1)}(\mu_0) &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (346)$$

mit $r_{ct} = V_{cs}^* V_{cb} / V_{ts}^* V_{tb}$. Der Wert von $C_1^{(1)}$ wurde im \overline{MS} -Schema unter Benutzung des evaneszenten Operators berechnet:

$$\hat{P}_{11} = (\bar{s} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho P_L \mathbf{T}^a c) (\bar{c} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho P_L \mathbf{T}^a b) - 16 \hat{P}_1. \quad (347)$$

Im weiteren soll wieder der Operator \hat{P}_7 zur Veranschaulichung der Rechnung dienen. Es gelten alle Aussagen, die bei der Betrachtung der effektiven Theorie im Paragraphen 4.2.1 gemacht wurden, bis auf den Punkt, daß in dem hier betrachteten Fall tree-Level-Beiträge vom Operator \hat{P}_2^c existieren. Die Gleichung (322) kann hier ebenso benutzt werden, jetzt wird allerdings Z_ψ und Z_m sofort identisch 1 gesetzt:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{P_7} = Z_g^{-2} \sum_k C_k Z_{k7} \hat{P}_7 \quad . \quad (348)$$

Setzt man nun die Entwicklungen für die Renormierungskonstanten und Wilson-Koeffizienten ein, so folgt:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{P_7} = \left(1 + \frac{g_3^2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \left(-\frac{1}{2} \beta_0 \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left(C_2^{(0)c} + \frac{g_3^2}{(4\pi)^2} C_2^{(1)c} \right) \left(\frac{g_3^4}{(4\pi)^4} \frac{1}{\varepsilon} a_{27}^{12} \right) \right. \\
& + \left(\frac{g_3^2}{(4\pi)^2} C_7^{(1)c} + \frac{g_3^4}{(4\pi)^4} C_7^{(2)c} \right) \left(1 + \frac{g_3^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} a_{77}^{11} \right) \\
& + \left. \left(\frac{g_3^2}{(4\pi)^2} C_8^{(1)c} + \frac{g_3^4}{(4\pi)^4} C_8^{(2)c} \right) \left(\frac{g_3^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} a_{87}^{11} \right) \right] \\
& = \left[\frac{g_3^2}{(4\pi)^2} C_7^{(1)c} + \frac{g_3^4}{(4\pi)^4} \frac{1}{\varepsilon} \left((a_{77}^{11} + \beta_0) C_7^{(1)c} + a_{27}^{12} C_2^{(0)c} + a_{87}^{12} C_8^{(1)c} \right) \right] . \quad (349)
\end{aligned}$$

Aufgrund der tree-Level-Beiträge vom Operator \hat{P}_2 ist es notwendig, die 2-loop-anomale Dimension a_{27}^{12} zu bestimmen, was die Hauptschwierigkeit darstellt. Es ergibt sich [78]: $a_{27}^{12} = 116/81$. Mit dem Ergebnis in (349) und der analogen Rechnung für $\hat{P}_{4,8}$ folgt für die Wilson-Koeffizienten [77, 78]:

$$\begin{aligned}
\delta^c C_4^{(0)}(\mu_0) &= 0 \quad , & \delta^c C_4^{(1)}(\mu_0) &= \left(\frac{7}{9} - \frac{2}{3} \ln \frac{\mu_0^2}{M_W^2} \right) r_{ct} \quad , \\
\delta^c C_7^{(0)}(\mu_0) &= \frac{23}{36} r_{ct} \quad , & \delta^c C_7^{(1)}(\mu_0) &= \left(-\frac{713}{243} - \frac{4}{81} \ln \frac{\mu_0^2}{M_W^2} \right) r_{ct} \quad , \quad (350) \\
\delta^c C_8^{(0)}(\mu_0) &= \frac{1}{3} r_{ct} \quad , & \delta^c C_8^{(1)}(\mu_0) &= \left(-\frac{91}{324} + \frac{4}{27} \ln \frac{\mu_0^2}{M_W^2} \right) r_{ct} \quad .
\end{aligned}$$

Den u-Quark-Sektor erhält man aus diesen Resultaten durch Austausch von r_{ct} mit $r_{ut} = V_{us}^* V_{ub} / V_{ts}^* V_{tb}$. Nach dem Aufsummieren der charm- und up-Quark-Beiträge kann man die Unitarität der CKM-Matrix ausnutzen und schreiben: $r_{ut} + r_{ct} = -1$.

4.3 Substitutionen

Im weiteren sollen die generischen Gleichungen benutzt werden, um die Wilson-Koeffizienten im SM, 2HDM, Links-Rechts-Modell und im MSSM zu bestimmen.

Das Standardmodell

Durch die Benutzung der Hintergrundfeldeichung ist der W -Boson-Skalar-Photon-Vertex nicht in der Theorie enthalten. Somit läßt sich für das SM die bisher durchgeführte Trennung in Diagramme mit schweren Vektor-Bosonen und schweren Fermionen und Diagramme mit schweren skalaren Teilchen und schweren Fermionen anwenden. Zusätzlich sind noch die Beiträge relevant, die von Diagrammen mit leichten internen Fermionen stammen. Die folgenden Substitutionen müssen durchgeführt werden:

$$N \left(S_L^* B_L + \frac{m_s}{m_b} S_R^* B_R \right) = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{m_s^2}{M_W^2} \right) \simeq \frac{x}{2} \quad , \quad (351)$$

$$N S_L^* B_R \frac{m_\psi}{m_b} = -\frac{x}{2} \quad , \quad (352)$$

$$\tilde{N} \sigma_L^* \beta_L = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sigma_R = \beta_R = 0 \quad , \quad (353)$$

wobei $x = m_t^2/M_W^2$ ist. Die weiteren Substitutionen sind:

$$\begin{aligned} m_\psi &\rightarrow m_t \quad , \quad m_\phi, m_V \rightarrow M_W \quad , \\ Q_\psi &\rightarrow \frac{2}{3} \quad , \quad Q_\phi, Q_V \rightarrow -1 \quad , \\ \omega &\rightarrow -2 \quad , \quad \kappa_\psi \rightarrow \frac{4}{3} \quad , \quad \kappa_\phi \rightarrow 0 \quad . \end{aligned}$$

Addiert man nun die 3 Beiträge (schweres Fermion mit schwerem Vektor-Boson; schweres Fermion mit schwerem Skalar; leichtes Fermion mit schwerem Vektor-Boson), dann ergibt sich:

$$C_{7,8}^{(0)}(\mu_0) = -\frac{3}{2}x H_1^{[7,8]}(x) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} H_1^{[7]}(x) = \frac{-3x^2 + 2x}{6(1-x)^4} \ln x + \frac{-8x^2 - 5x + 7}{36(1-x)^3} \\ H_1^{[8]}(x) = \frac{x}{2(1-x)^4} \ln x + \frac{-x^2 + 5x + 2}{12(1-x)^3} \end{cases} \quad (354)$$

$$C_4^{(1)}(\mu_0) = \frac{4x^4 - 16x^3 + 15x^2}{6(1-x)^4} \ln x + \frac{7x^3 - 35x^2 + 42x - 8}{12(1-x)^3} + \frac{2}{3} \ln \frac{\mu_0^2}{m_t^2}, \quad (355)$$

$$\begin{aligned} C_7^{(1)}(\mu_0) &= \frac{-16x^4 - 122x^3 + 80x^2 - 8x}{9(1-x)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) - \frac{4x^5 - 407x^4 - 1373x^3 + 957x^2 - 45x}{81(1-x)^5} \ln x \\ &+ \frac{1520x^4 + 12961x^3 - 12126x^2 + 3409x - 580}{486(1-x)^4} \\ &+ \left[\frac{6x^4 + 46x^3 - 28x^2}{3(1-x)^5} \ln x + \frac{106x^4 + 287x^3 + 1230x^2 - 1207x + 232}{81(1-x)^4} \right] \ln \frac{\mu_0^2}{m_t^2} \quad , \quad (356) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_8^{(1)}(\mu_0) &= \frac{-4x^4 + 40x^3 + 41x^2 + x}{6(1-x)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{32x^5 - 16x^4 - 2857x^3 - 3981x^2 - 90x}{216(1-x)^5} \ln x \\ &+ \frac{611x^4 - 13346x^3 - 29595x^2 + 1510x - 652}{1296(1-x)^4} \\ &+ \left[\frac{-17x^3 - 31x^2}{2(1-x)^5} \ln x + \frac{89x^4 - 446x^3 - 1437x^2 - 950x + 152}{108(1-x)^4} \right] \ln \frac{\mu_0^2}{m_t^2} \quad . \quad (357) \end{aligned}$$

Diese Resultate sind in Übereinstimmung mit [13, 16, 79]. Die Koeffizienten der gestrichenen Operatoren sind durch die kleinen Yukawa-Kopplungen mit m_s/m_b unterdrückt.

2HDM

Für das 2HDM müssen nur Diagramme mit schweren skalaren Teilchen und schweren Fermionen betrachtet werden. Die notwendigen Substitutionen sind:

$$N \left(S_L^* B_L + \frac{m_s}{m_b} S_R^* B_R \right) = \frac{y}{2} \cot^2 \beta \left(1 + \frac{m_s^2}{M_W^2} \right) \simeq \frac{y}{2} \cot^2 \beta \quad , \quad (358)$$

$$N S_L^* B_R \frac{m_\psi}{m_b} = \frac{y}{2} \quad , \quad (359)$$

wobei $y = m_t^2/M_H^2$. Weiterhin gilt:

$$m_\psi \rightarrow m_t \quad , \quad m_\phi \rightarrow M_H \quad ,$$

$$Q_\psi \rightarrow \frac{2}{3} \quad , \quad Q_\phi \rightarrow -1 \quad ,$$

$$\kappa_\psi \rightarrow \frac{4}{3} \quad , \quad \kappa_\phi \rightarrow 0 \quad .$$

Die resultierenden Wilson-Koeffizienten sind:

$$\begin{aligned} \delta^{H^-} C_{7,8}^{(0)}(\mu_0) &= -\frac{y \cot^2 \beta}{2} H_1^{[7,8]}(y) + \frac{1}{2} H_2^{[7,8]}(y) \\ \text{mit} \quad \begin{cases} H_2^{[7]}(y) &= \frac{-3y^2 + 2y}{3(1-y)^3} \ln y + \frac{-5y^2 + 3y}{6(1-y)^2} \\ H_2^{[8]}(y) &= \frac{y}{(1-y)^3} \ln y + \frac{-y^2 + 3y}{2(1-y)^2} \end{cases} \quad , \end{aligned} \quad (360)$$

$$\delta^{H^-} C_4^{(1)}(\mu_0) = \cot^2 \beta \left[\frac{3y^2 - 2y}{6(1-y)^4} \ln y + \frac{-7y^3 + 29y^2 - 16y}{36(1-y)^3} \right] \quad , \quad (361)$$

$$\begin{aligned} \delta^{H^-} C_7^{(1)}(\mu_0) &= \cot^2 \beta \left\{ \frac{16y^4 - 74y^3 + 36y^2}{9(1-y)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{y} \right) - \frac{63y^4 - 807y^3 + 463y^2 - 7y}{81(1-y)^5} \ln y \right. \\ &\quad + \frac{-1202y^4 + 7569y^3 - 5436y^2 + 797y}{486(1-y)^4} \\ &\quad \left. + \left[\frac{6y^4 + 46y^3 - 28y^2}{9(1-y)^5} \ln y + \frac{-14y^4 + 135y^3 - 18y^2 - 31y}{27(1-y)^4} \right] \ln \frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{-32y^3 + 112y^2 - 48y}{9(1-y)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{y} \right) + \frac{14y^3 - 128y^2 + 66y}{9(1-y)^4} \ln y \\
& + \frac{8y^3 - 52y^2 + 28y}{3(1-y)^3} \\
& + \left[\frac{-12y^3 - 56y^2 + 32y}{9(1-y)^4} \ln y + \frac{16y^3 - 94y^2 + 42y}{9(1-y)^3} \right] \ln \frac{\mu_0^2}{m_t^2} \quad , \tag{362}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^{H^-} C_8^{(1)}(\mu_0) &= \cot^2 \beta \left\{ \frac{13y^4 - 17y^3 + 30y^2}{6(1-y)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{y} \right) + \frac{-468y^4 + 321y^3 - 2155y^2 - 2y}{216(1-y)^5} \ln y \right. \\
& - \frac{4451y^4 - 7650y^3 + 18153y^2 - 1130y}{1296(1-y)^4} \\
& + \left[\frac{-17y^3 - 31y^2}{6(1-y)^5} \ln y + \frac{-7y^4 + 18y^3 - 261y^2 - 38y}{36(1-y)^4} \right] \ln \frac{\mu_0^2}{m_t^2} \Big\} \\
& + \frac{-17y^3 + 25y^2 - 36y}{6(1-y)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{y} \right) + \frac{34y^3 - 7y^2 + 165y}{12(1-y)^4} \ln y \\
& + \frac{29y^3 - 44y^2 + 143y}{8(1-y)^3} \\
& + \left[\frac{17y^2 + 19y}{3(1-y)^4} \ln y + \frac{7y^3 - 16y^2 + 81y}{6(1-y)^3} \right] \ln \frac{\mu_0^2}{m_t^2} \quad . \tag{363}
\end{aligned}$$

Diese Resultate sind in Übereinstimmung mit [81]. Die Wilson-Koeffizienten der gestrichenen Operatoren sind wie im SM mit m_s/m_b unterdrückt.

Das Links-Rechts-Modell

Im dritten Beispiel wird das $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ -Modell diskutiert. Die Notation ist in [39] bzw. im Kapitel 2.3.2 beschrieben. Es wird sich hierbei auf Beiträge des leichten W -Bosons und des korrespondierenden would-be-Goldstone-Bosons beschränkt, welche durch den kleinen Mischungswinkel ζ unterdrückt sind, jedoch gleichzeitig durch das große Verhältnis m_t/m_b verstärkt werden. Die notwendigen Substitutionen sind:

$$\begin{aligned}
NS_L^* B_R \frac{m_\psi}{m_b} &= \frac{x}{2} A^{tb} \quad , \quad \tilde{N} \sigma_L^* \beta_R \frac{m_\psi}{m_b} = \frac{1}{2} A^{tb} \quad , \\
NS_R^* B_L \frac{m_\psi}{m_b} &= \frac{x}{2} (A^{ts})^* \quad , \quad \tilde{N} \sigma_R^* \beta_L \frac{m_\psi}{m_b} = \frac{1}{2} (A^{ts})^* \quad . \tag{364}
\end{aligned}$$

und

$$A^{tb(s)} = \frac{m_t}{m_b} \zeta e^{i\alpha} \frac{g_{2R} V_{tb(s)}^R}{g_{2L} V_{tb(s)}^L} + \mathcal{O}(\zeta^2) \quad . \quad (365)$$

Die „links-links“ und „rechts-rechts“ Kopplungen können vernachlässigt werden, da ihr Nicht-SM-Teil von der Ordnung $\mathcal{O}(\zeta^2, m_b/M_W)$ ist. Alle Substitutionen für Massen, Ladungen und Farbfaktoren sind identisch mit dem SM.

Die Wilson-Koeffizienten lauten:

$$\delta^{LR} C_4(\mu_0) = 0 \quad , \quad (366)$$

$$\delta^{LR} C_7^{(0)}(\mu_0) = A^{tb} \left[\frac{3x^2 - 2x}{2(1-x)^3} \ln x + \frac{-5x^2 + 31x - 20}{12(1-x)^2} \right] \quad , \quad (367)$$

$$\delta^{LR} C_8^{(0)}(\mu_0) = A^{tb} \left[\frac{-3x}{2(1-x)^3} \ln x + \frac{-x^2 - x - 4}{4(1-x)^2} \right] \quad , \quad (368)$$

$$\begin{aligned} \delta^{LR} C_7^{(1)}(\mu_0) = A^{tb} & \left\{ \frac{-32x^3 - 112x^2 + 48x}{9(1-x)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{86x^3 + 120x^2 - 30x - 32}{9(1-x)^4} \ln x \right. \\ & + \frac{24x^3 + 320x^2 - 220x + 20}{9(1-x)^3} \\ & \left. + \left[\frac{12x^3 + 56x^2 - 32x}{3(1-x)^4} \ln x + \frac{16x^3 + 90x^2 + 66x - 64}{9(1-x)^3} \right] \ln \frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right\} \quad , \quad (369) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^{LR} C_8^{(1)}(\mu_0) = A^{tb} & \left\{ \frac{-17x^3 + 89x^2 + 12x}{6(1-x)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{34x^3 - 375x^2 - 207x - 28}{12(1-x)^4} \ln x \right. \\ & + \frac{87x^3 - 640x^2 - 451x - 148}{24(1-x)^3} \\ & \left. + \left[\frac{-17x^2 - 19x}{(1-x)^4} \ln x + \frac{7x^3 - 36x^2 - 159x - 28}{6(1-x)^3} \right] \ln \frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right\} \quad . \quad (370) \end{aligned}$$

Die gestrichenen Koeffizienten erhält man durch den Austausch $A^{tb} \rightarrow (A^{ts})^*$. Die Ausdrücke für die LO-Koeffizienten stimmen mit [39, 77] überein. Die NLO-Resultate sind zum ersten Mal in [77] berechnet worden und sind identisch mit den hier präsentierten.

Physikalische, geladene, skalare Teilchen, welche im Links-Rechts-Modell enthalten sind, können ebenfalls m_t/m_b -verstärkte Beiträge liefern [87]. Solche Beiträge sind ebenfalls mit den in dieser Arbeit gegebenen generischen Gleichungen berechenbar. Ihre explizite Form und somit numerische Wichtigkeit hängt jedoch vom speziell gewählten Higgs-Sektor ab, welcher

im Links-Rechts-Modell nicht eindeutig bestimmt ist.

Minimales Supersymmetrisches Standardmodell

In diesem Abschnitt werden flavor-erhaltende Gluino-Wechselwirkungen und quartische Squark-Kopplungen als schwach angenommen. Die für die spätere numerische Auswertung wichtigen quartische Squark-Kopplungen sind im Anhang G.4 aufgeführt. Die komplette Behandlung der Gluino-Effekte, d. h. Diagramme ohne Gluonen, aber mit Gluinos, ist bisher noch nicht gelungen und kann auch kein Gegenstand dieser Ausführungen sein. Diese hier gezeigten Resultate sind jedoch im Limes schwerer Gluino-Massen aussagefähig.

Für den Chargino-Sektor müssen die folgenden Substitutionen vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} N \left(S_L^* B_L + \frac{m_s}{m_b} S_R^* B_R \right) &= \frac{1}{g_2^2 V_{ts}^* V_{tb}} \frac{M_W^2}{m_{\tilde{u}_A}^2} \left(X_I^{U_L} \right)_{A2}^* \left(X_I^{U_L} \right)_{A3} + \mathcal{O} \left(\frac{m_s^2}{M_W^2} \right) , \\ N S_L^* B_R \frac{m_\psi}{m_b} &= \frac{1}{g_2^2 V_{ts}^* V_{tb}} \frac{M_W^2}{m_{\tilde{u}_A}^2} \left(X_I^{U_L} \right)_{A2}^* \left(X_I^{U_R} \right)_{A3} \frac{m_{\tilde{\chi}_I^-}}{m_b} . \end{aligned} \quad (371)$$

Der Index I nummeriert die Charginos ($I = 1, 2$), die up-Squarks werden durch A indiziert ($A = 1, \dots, 6$). Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} m_\psi &\rightarrow m_{\tilde{\chi}_I^-} , & m_\phi &\rightarrow m_{\tilde{u}_A} , \\ Q_\psi &\rightarrow -1 , & Q_\phi &\rightarrow 2/3 , \\ \kappa_\psi &\rightarrow 0 , & \kappa_\phi &\rightarrow 4/3 . \end{aligned}$$

Nach der Summation über alle up-Squarks und Charginos ergeben sich die folgenden Wilson-Koeffizienten:

$$\delta \tilde{\chi}^- C_4^{(1)}(\mu_0) = \frac{1}{g_2^2 V_{ts}^* V_{tb}} \sum_{A=1}^6 \sum_{I=1}^2 \frac{M_W^2}{m_{\tilde{\chi}_I^-}^2} \left(X_I^{U_L} \right)_{A2}^* \left(X_I^{U_L} \right)_{A3} H_1^{[4]}(z_{AI}) , \quad (372)$$

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\chi}^- C_{7,8}(\mu_0) &= \frac{1}{g_2^2 V_{ts}^* V_{tb}} \sum_{A=1}^6 \sum_{I=1}^2 \frac{M_W^2}{m_{\tilde{\chi}_I^-}^2} \times \\ &\times \left\{ \left(X_I^{U_L} \right)_{A2}^* \left(X_I^{U_L} \right)_{A3} \left[H_1^{[7,8]}(z_{AI}) + \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(H_1^{[7,8]'}(z_{AI}) + H_1^{[7,8]''}(z_{AI}) \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_{\tilde{u}_A}^2} \right) \right) \right] \right. \\ &\left. + \frac{m_{\tilde{\chi}_I^-}}{m_b} \left(X_I^{U_L} \right)_{A2}^* \left(X_I^{U_R} \right)_{A3} \left[H_2^{[7,8]}(z_{AI}) + \lambda^{[7,8]} + \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(H_2^{[7,8]'}(z_{AI}) + H_2^{[7,8]''}(z_{AI}) \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_{\tilde{u}_A}^2} \right) \right) \right] \right\} , \end{aligned} \quad (373)$$

mit $z_{AI} = m_{\tilde{u}_A}^2 / m_{\tilde{\chi}_I^-}^2$. Die Konstanten $\lambda^{[7]} = 5/6$ und $\lambda^{[8]} = 1/2$ verschwinden durch die Unitarität der Squark-Massenmatrix, sobald die Chargino-Materie-Kopplungen $X^{U_{L,R}}$ nicht mehr als unabhängig von anderen MSSM-Parametern behandelt werden [48].

Die Funktionen $H_{1,2}^{[7,8]}$ wurden bereits im SM- und 2HDM-Fall definiert. Die neuen Funktionen $H_1^{[4]}$, $H_{1,2}^{[7,8]{'}}$ und $H_{1,2}^{[7,8]{'{'}}$ haben die folgende explizite Gestalt:

$$H_1^{[4]}(x) = \frac{-1}{3(1-x)^4} \ln x + \frac{-2x^2 + 7x - 11}{18(1-x)^3}, \quad (374)$$

$$\begin{aligned} H_1^{[7]{'}}(x) &= \frac{24x^3 + 52x^2 - 32x}{9(1-x)^4} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{-189x^3 - 783x^2 + 425x + 43}{81(1-x)^5} \ln x \\ &+ \frac{-1030x^3 - 1899x^2 + 1332x + 85}{243(1-x)^4}, \end{aligned} \quad (375)$$

$$H_1^{[7]{'{'}}}(x) = \frac{6x^3 - 62x^2 + 32x}{9(1-x)^5} \ln x + \frac{28x^3 - 129x^2 - 12x + 41}{27(1-x)^4}, \quad (376)$$

$$\begin{aligned} H_2^{[7]{'}}(x) &= \frac{112x^2 - 48x}{9(1-x)^3} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{12x^3 - 176x^2 + 64x + 16}{9(1-x)^4} \ln x \\ &+ \frac{-170x^2 + 66x + 20}{9(1-x)^3}, \end{aligned} \quad (377)$$

$$H_2^{[7]{'{'}}}(x) = \frac{12x^3 - 88x^2 + 40x}{9(1-x)^4} \ln x + \frac{-14x^2 - 54x + 32}{9(1-x)^3}, \quad (378)$$

$$\begin{aligned} H_1^{[8]{'}}(x) &= \frac{-9x^3 - 46x^2 - 49x}{12(1-x)^4} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{81x^3 + 594x^2 + 1270x + 71}{108(1-x)^5} \ln x \\ &+ \frac{923x^3 + 3042x^2 + 6921x + 1210}{648(1-x)^4}, \end{aligned} \quad (379)$$

$$H_1^{[8]{'{'}}}(x) = \frac{5x^2 + 19x}{3(1-x)^5} \ln x + \frac{7x^3 - 30x^2 + 141x + 26}{18(1-x)^4}, \quad (380)$$

$$H_2^{[8]{'}}(x) = \frac{-16x^2 - 12x}{3(1-x)^3} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{52x^2 + 109x + 7}{6(1-x)^4} \ln x + \frac{95x^2 + 180x + 61}{12(1-x)^3}, \quad (381)$$

$$H_2^{[8]{'{'}}}(x) = \frac{10x^2 + 26x}{3(1-x)^4} \ln x + \frac{-x^2 + 30x + 7}{3(1-x)^3}. \quad (382)$$

Die Substitutionen für den Neutralino-Sektor sind ähnlich den soeben vollführten:

$$\begin{aligned}
N \left(S_L^* B_L + \frac{m_s}{m_b} S_R^* B_R \right) &= \frac{1}{g_2^2 V_{ts}^* V_{tb}} \frac{M_W^2}{m_{\tilde{d}_A}^2} \left(Z_I^{D_L} \right)_{A2}^* \left(Z_I^{D_L} \right)_{A3} + \mathcal{O} \left(\frac{m_s^2}{M_W^2} \right) , \\
N S_L^* B_R \frac{m_\psi}{m_b} &= \frac{1}{g_2^2 V_{ts}^* V_{tb}} \frac{M_W^2}{m_{\tilde{d}_A}^2} \left(Z_I^{D_L} \right)_{A2}^* \left(Z_I^{D_R} \right)_{A3} \frac{m_{\tilde{\chi}_I^0}}{m_b}
\end{aligned} \tag{383}$$

und

$$\begin{aligned}
m_\psi &\rightarrow m_{\tilde{\chi}_I^0} , & m_\phi &\rightarrow m_{\tilde{d}_A} , \\
Q_\psi &\rightarrow 0 , & Q_\phi &\rightarrow -1/3 , \\
\kappa_\psi &\rightarrow 0 , & \kappa_\phi &\rightarrow 4/3 .
\end{aligned}$$

Es gibt vier Neutralino-Spezies, so daß $I = 1, \dots, 4$ ist. Weiterhin ist das Neutralino ebenso wie das Gluino ein Majorana-Fermion. Man muß sich nun fragen, ob die für Dirac-Fermionen abgeleiteten generischen Gleichungen in Kapitel 4.2 hier anwendbar sind. Im Gegensatz zum $B\bar{B}$ -Mixing (siehe Kapitel 3.7) ist die Antwort positiv, d. h., für die hier behandelten Fälle gibt es technisch keinen Unterschied zwischen Dirac- und Majorana-Fermionen [77].

Die Wilson-Koeffizienten haben die Struktur:

$$\delta \tilde{\chi}^0 C_4^{(1)}(\mu_0) = \frac{1}{g_2^2 V_{ts}^* V_{tb}} \sum_{A=1}^6 \sum_{I=1}^4 \frac{M_W^2}{m_{\tilde{\chi}_I^0}^2} \left(Z_I^{D_L} \right)_{A2}^* \left(Z_I^{D_L} \right)_{A3} H_1^{[4]}(w_{AI}) , \tag{384}$$

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{\chi}^0 C_{7,8}(\mu_0) &= \frac{1}{g_2^2 V_{ts}^* V_{tb}} \sum_{A=1}^6 \sum_{I=1}^4 \frac{M_W^2}{m_{\tilde{\chi}_I^0}^2} \times \\
&\times \left\{ \left(Z_I^{D_L} \right)_{A2}^* \left(Z_I^{D_L} \right)_{A3} \left[H_3^{[7,8]}(w_{AI}) + \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(H_3^{[7,8]'}(w_{AI}) + H_3^{[7,8]''}(w_{AI}) \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_{\tilde{d}_A}^2} \right) \right) \right] \right. \\
&+ \left. \frac{m_{\tilde{\chi}_I^-}}{m_b} \left(Z_I^{D_L} \right)_{A2}^* \left(Z_I^{D_R} \right)_{A3} \left[H_4^{[7,8]}(w_{AI}) + \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(H_4^{[7,8]'}(w_{AI}) + H_4^{[7,8]''}(w_{AI}) \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_{\tilde{d}_A}^2} \right) \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{385}$$

mit $w_{AI} = m_{\tilde{d}_A}^2 / m_{\tilde{\chi}_I^0}^2$. Für die Funktionen H gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
H_3^{[8]}(x) &= H_1^{[8]}(x) , & H_4^{[8]}(x) &= H_2^{[8]}(x) + \frac{1}{2} , & H_{3,4}^{[8]'}(x) &= H_{1,2}^{[8]'}(x) , \\
H_{3,4}^{[8]''}(x) &= H_{1,2}^{[8]''}(x) , & H_3^{[7]}(x) &= -\frac{1}{3} H_1^{[8]}(x) , & H_4^{[7]}(x) &= -\frac{1}{3} \left(H_2^{[8]}(x) + \frac{1}{2} \right) ,
\end{aligned} \tag{386}$$

$$\begin{aligned}
H_3^{[7]'}(x) &= \frac{16x^2 + 28x}{9(1-x)^4} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{-108x^2 - 358x - 38}{81(1-x)^5} \ln x \\
&\quad + \frac{23x^3 - 765x^2 - 693x - 77}{243(1-x)^4} , \tag{387}
\end{aligned}$$

$$H_3^{[7]''}(x) = \frac{4x^2 - 28x}{9(1-x)^5} \ln x + \frac{-8x^3 + 42x^2 - 84x - 22}{27(1-x)^4} , \tag{388}$$

$$H_4^{[7]'}(x) = \frac{16x^2 + 48x}{9(1-x)^3} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{-8x^2 - 68x - 8}{9(1-x)^4} \ln x + \frac{-26x^2 - 54x - 4}{9(1-x)^3} , \tag{389}$$

$$H_4^{[7]''}(x) = \frac{8x^2 - 44x}{9(1-x)^4} \ln x + \frac{10x^2 - 30x - 16}{9(1-x)^3} . \tag{390}$$

Zum Abschluß dieses Paragraphen soll der Gluino-Sektor untersucht werden. Da die Gluonen durch die adjungierte Darstellung der $SU(3)_C$ beschrieben werden, müssen sich die Gluinos als Superpartner der Gluonen ebenfalls in dieser Darstellung befinden. Die Bemerkungen hinsichtlich des Majorana-Charakters im Neutralino-Sektor sind ebenfalls gültig.

Folgende Substitutionen müssen durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}
N \left(S_L^* B_L + \frac{m_s}{m_b} S_R^* B_R \right) &= \frac{8g_3^2}{3g_2^2 V_{ts}^* V_{tb}} \frac{M_W^2}{m_{\tilde{d}_A}^2} \left(\Gamma^{D_L} \right)_{A2}^* \left(\Gamma^{D_L} \right)_{A3} + \mathcal{O} \left(\frac{m_s^2}{M_W^2} \right) , \\
N S_L^* B_R \frac{m_\psi}{m_b} &= -\frac{8g_3^2}{3g_2^2 V_{ts}^* V_{tb}} \frac{M_W^2}{m_{\tilde{d}_A}^2} \left(\Gamma^{D_L} \right)_{A2}^* \left(\Gamma^{D_R} \right)_{A3} \frac{m_{\tilde{g}}}{m_b} \tag{391}
\end{aligned}$$

und

$$m_\psi \rightarrow m_{\tilde{g}} , \quad m_\phi \rightarrow m_{\tilde{d}_A} ,$$

$$Q_\psi \rightarrow 0 , \quad Q_\phi \rightarrow -1/3 ,$$

$$\kappa_\psi \rightarrow 3 , \quad \kappa_\phi \rightarrow 4/3 .$$

Die sich aus diesen Substitutionen ergebenden Wilson-Koeffizienten sind:

$$\delta^{\tilde{g}} C_4^{(1)}(\mu_0) = \frac{8g_3^2}{3g_2^2 V_{ts}^* V_{tb}} \frac{M_W^2}{m_{\tilde{g}}^2} \sum_{A=1}^6 \left(\Gamma^{D_L} \right)_{A2}^* \left(\Gamma^{D_L} \right)_{A3} H_5^{[4]}(v_A) , \tag{392}$$

$$\delta^{\tilde{g}} C_{7,8}(\mu_0) = \frac{8g_3^2}{3g_2^2 V_{ts}^* V_{tb}} \frac{M_W^2}{m_{\tilde{g}}^2} \sum_{A=1}^6 \times$$

$$\times \left\{ \left(\Gamma^{D_L} \right)_{A2}^* \left(\Gamma^{D_L} \right)_{A3} \left[H_5^{[7,8]}(v_A) + \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(H_5^{[7,8]'}(v_A) + H_5^{[7,8]''}(v_A) \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_{\tilde{d}_A}^2} \right) \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{m_{\tilde{g}}}{m_b} \left(\Gamma^{D_L} \right)_{A2}^* \left(\Gamma^{D_R} \right)_{A3} \left[H_6^{[7,8]}(v_A) + \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(H_6^{[7,8]'}(v_A) + H_6^{[7,8]''}(v_A) \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_{\tilde{d}_A}^2} \right) \right) \right] \right\} \quad (393)$$

mit $v_A = m_{\tilde{d}_A}^2/m_{\tilde{g}}^2$. Für die Funktionen H gelten die folgenden Beziehungen:

$$H_5^{[7]}(x) = -\frac{1}{3}H_1^{[8]}(x) \quad , \quad H_6^{[7]}(x) = -\frac{1}{3} \left(H_2^{[8]}(x) + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad (394)$$

$$H_5^{[4]}(x) = \frac{18x^3 - 27x^2 + 1}{24(1-x)^4} \ln x + \frac{73x^2 - 134x + 37}{72(1-x)^3} \quad , \quad (395)$$

$$H_5^{[7]'}(x) = \frac{17x^2 + 86x - 15}{18(1-x)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{6x^3 + 45x^2 + 66x - 5}{12(1-x)^5} \ln^2 x \\ + \frac{-36x^4 - 315x^3 + 1161x^2 + 751x + 23}{162(1-x)^5} \ln x \\ + \frac{-799x^3 + 1719x^2 + 10431x - 1847}{972(1-x)^4} \quad , \quad (396)$$

$$H_5^{[7]''}(x) = \frac{18x^3 + 107x^2 + 43x}{18(1-x)^5} \ln x + \frac{-5x^3 + 384x^2 + 609x + 20}{108(1-x)^4} \quad , \quad (397)$$

$$H_6^{[7]'}(x) = \frac{19x^2 + 60x - 15}{9(1-x)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{6x^3 + 36x^2 + 48x - 5}{6(1-x)^4} \ln^2 x \\ + \frac{-27x^3 + 106x^2 + 52x + 1}{9(1-x)^4} \ln x + \frac{14x^2 + 333x - 83}{18(1-x)^3} \quad , \quad (398)$$

$$H_6^{[7]''}(x) = \frac{18x^3 + 80x^2 + 28x}{9(1-x)^4} \ln x + \frac{55x^2 + 69x + 2}{9(1-x)^3} \quad , \quad (399)$$

$$H_5^{[8]}(x) = \frac{9x^2 - x}{16(1-x)^4} \ln x + \frac{19x^2 + 40x - 11}{96(1-x)^3} \quad , \quad (400)$$

$$H_5^{[8]'}(x) = \frac{45x^3 - 1208x^2 + 901x - 570}{96(1-x)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{-237x^3 - 846x^2 + 282x - 95}{32(1-x)^5} \ln^2 x \\ + \frac{2520x^4 - 10755x^3 - 10638x^2 - 6427x - 44}{864(1-x)^5} \ln x$$

$$+ \frac{5359x^3 - 241425x^2 + 143253x - 59251}{5184(1-x)^4} , \quad (401)$$

$$H_5^{[8]''}(x) = \frac{-747x^3 - 640x^2 + 43x}{48(1-x)^5} \ln x + \frac{-779x^3 - 7203x^2 - 93x + 11}{288(1-x)^4} , \quad (402)$$

$$H_6^{[8]}(x) = \frac{9x^2 - x}{8(1-x)^3} \ln x + \frac{13x - 5}{8(1-x)^2} , \quad (403)$$

$$\begin{aligned} H_6^{[8]'}(x) = & \frac{-359x^2 + 339x - 204}{24(1-x)^3} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{-78x^3 - 333x^2 + 105x - 34}{8(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{-207x^3 - 1777x^2 + 23x - 151}{48(1-x)^4} \ln x + \frac{-1667x^2 + 990x - 379}{24(1-x)^3} , \end{aligned} \quad (404)$$

$$H_6^{[8]''}(x) = \frac{-126x^3 - 133x^2 + 7x}{6(1-x)^4} \ln x + \frac{-553x^2 + 84x - 35}{12(1-x)^3} . \quad (405)$$

Die hier gezeigten LO-Resultate stimmen mit den entsprechenden Ergebnissen in [48, 89] überein.

4.4 Resultate

An dieser Stelle soll das Verzweigungsverhältnis für den Prozeß $B \rightarrow X_s \gamma$ im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell untersucht werden. Obwohl die vorangegangenen Rechnungen sehr umfangreich waren, so gelten sie doch nur in einem bestimmten Parameterbereich des MSSM. Die hier präsentierten Ergebnisse sind nicht auf Situationen anwendbar, in denen die Masse des Gluinos nahe M_W oder m_t ist. Weiter gelten sie nur für den sogenannten Low-tan β -Bereich. Eine Erweiterung würde im ersten Fall die Berechnung von Diagrammen ohne Gluonen, aber mit Gluinos erfordern¹⁹. Die Erweiterung der Untersuchung auf den Bereich mit großen tan β setzt die Berechnung von Diagrammen ohne QCD-Wechselwirkung voraus, da in diesem Fall auch Yukawa-Kopplungen numerisch relevante NLO-Beiträge liefern.

In dem hier dargestellten Szenario wird vorausgesetzt, daß das Gluino schwer ist und von der Theorie entkoppelt, so daß $1/m_{\tilde{g}}$ -Korrekturen verschwinden. Somit sind die im vorherigen Kapitel gegebenen Resultate und die Beiträge der Diagramme mit 4-Squark-Vertex in G.4 ausreichend. Selbstverständlich ist eine Theorie mit entkoppelten Gluinos nicht mehr supersymmetrisch, insbesondere verändern sich die Feynman-Regeln. Hier werden die Ergebnisse von [77] benutzt. Durch die Entkopplung des Gluinos werden die Chargino- und Neutralino-Kopplungs-Matrizen $X^{U_{L,R}}$ und $Z^{D_{L,R}}$, die bisher als unabhängige Parameter betrachtet wur-

¹⁹Bei diesen Diagrammen muß auf den Majorana-Charakter der Gluinos und Neutralinos Rücksicht genommen werden. Die meisten dieser Diagramme enthalten nur massive Teilchen. Die innerhalb dieser Arbeit benutzte Lösungsmethode für die auftretenden Integrale ist anwendbar und die analytischen Lösungen der Integrale sind bekannt. Die Ergebnisse sind jedoch wesentlich komplizierter.

den, zu anderen Parametern in der folgenden Weise in Beziehung gesetzt (Konvention siehe Kapitel 2.3.3):

$$X_I^{U_L} = g_2 \left[-a_g V_{I1}^* \Gamma^{U_L} + a_Y V_{I2}^* \Gamma^{U_R} \frac{M_U}{\sqrt{2} M_W \sin \beta} \right] \mathbf{V}_{\mathbf{CKM}} \quad , \quad (406)$$

$$X_I^{U_R} = g_2 a_Y U_{I2} \Gamma^{U_L} \mathbf{V}_{\mathbf{CKM}} \frac{M_D}{\sqrt{2} M_W \cos \beta} \quad , \quad (407)$$

$$Z_I^{D_L} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[a_g \left(-N_{I2}^* + \frac{1}{3} \tan \Theta_W N_{I1}^* \right) \Gamma^{D_L} + a_Y N_{I3}^* \Gamma^{D_R} \frac{M_D}{M_W \cos \beta} \right] \quad , \quad (408)$$

$$Z_I^{D_R} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[a_g \frac{2}{3} \tan \Theta_W N_{I1} \Gamma^{D_R} + a_Y N_{I3} \Gamma^{D_L} \frac{M_D}{M_W \cos \beta} \right] \quad , \quad (409)$$

wobei

$$a_g = 1 + \frac{\alpha_S(\mu_0)}{\pi} \left(\ln \frac{m_{\tilde{g}}}{\mu_0} - \frac{7}{12} \right) \quad \text{und} \quad a_Y = 1 - \frac{\alpha_S(\mu_0)}{\pi} \left(\ln \frac{m_{\tilde{g}}}{\mu_0} - \frac{1}{4} \right) \quad . \quad (410)$$

Alle hier gegebenen Parameter sind \overline{MS} -renormiert. Insbesondere gilt:

$$\alpha_S(\mu) = \frac{\alpha_S(M_Z)}{v_s(\mu)} \left[1 - \frac{\beta_1}{\beta_0} \frac{\alpha_S(M_Z)}{4\pi} \frac{\ln v_s(\mu)}{v_s(\mu)} \right] \quad (411)$$

mit

$$v_s(\mu) = 1 - \beta_0 \frac{\alpha_S(M_Z)}{4\pi} \ln \left(\frac{M_Z}{\mu} \right) \quad (412)$$

und

$$m_t^2(\mu) = m_t^2(m_t) \left(\frac{\alpha_S(\mu)}{\alpha_S(m_t)} \right)^{\frac{24}{23}} \left(1 - \frac{8}{3} \frac{\alpha_S(m_t)}{\pi} \right) \quad . \quad (413)$$

Der Fall a_g und a_Y identisch 1 entspricht dem vollen MSSM. Die Abweichung von 1 repräsentiert den Effekt der Entkopplung der Gluinos. Man erhält die expliziten Ausdrücke für a_g und a_Y aus dem 1-loop-Matching des vollen MSSM und der *effektiven heavy-Gluino Theorie*. Für eine weitere Diskussion wird auf [77] verwiesen.

Nachdem das Szenario nun fixiert ist, kann die Größe der $\mathcal{O}(\alpha_S)$ - Korrektur zum $BR[B \rightarrow X_s \gamma]$

betrachtet werden. Dazu soll ein einfacher Satz von MSSM-Parametern gewählt werden, der vom Experiment erlaubt ist:

$$\begin{aligned}
\tan \beta &= 3 \quad , \quad m_{\tilde{W}}/\mu = -2 \quad , \\
m_{h\pm} &= 100 \text{ GeV} \quad , \quad m_{\text{gluino}} = 700 \text{ GeV} \quad , \\
(M_{\tilde{\chi}^\pm})_{11} &= 140 \text{ GeV} \quad (\text{Masse des leichteren Charginos}) \quad , \\
(M_u^2)_{AB} &= (\delta_{AB} - \delta_{A6}\delta_{B6}) \times (350 \text{ GeV})^2 + \delta_{A6}\delta_{B6} \times (110 \text{ GeV})^2 \quad , \\
\Gamma_{AB}^U &\simeq \delta_{AB} + (\cos 25^\circ - 1)(\delta_{A3}\delta_{B3} + \delta_{A6}\delta_{B6}) + \sin 25^\circ(\delta_{A6}\delta_{B3} - \delta_{A3}\delta_{B6}) \quad , \\
\Gamma^D &\simeq (\text{flavor-diagonale Matrix}) \quad .
\end{aligned} \tag{414}$$

Die down-Squark- und Neutralino-Massen, sowie deren Mischungswinkel sind irrelevant an dieser Stelle, da Γ^D approximativ flavor-diagonal sein soll. Somit verschwinden alle Beiträge zu den Wilson-Koeffizienten $C_{4,7,8}$.

Entsprechend Gleichung (119) folgt mit $m_{\tilde{W}} \approx 328.749 \text{ GeV}$ und den beiden Diagonalisierungsmatrizen U und V :

$$U = \begin{pmatrix} -0.282933 & 0.95914 \\ 0.95914 & 0.282933 \end{pmatrix} \quad , \quad V = \begin{pmatrix} -0.418265 & 0.908325 \\ 0.908325 & 0.418265 \end{pmatrix} \quad , \tag{415}$$

für die diagonalisierte Chargino-Massenmatrix:

$$M_{\tilde{\chi}^\pm} \approx \begin{pmatrix} 140 \text{ GeV} & 0 \\ 0 & 358.331 \text{ GeV} \end{pmatrix} \quad . \tag{416}$$

Die Matrix P^U , welche für die Diagramme mit dem 4-Squark-Vertex wichtig ist, hat unter den oben gemachten Annahmen die Form:

$$P^U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\alpha) & 0 & 0 & \sin(2\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(2\alpha) & 0 & 0 & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \tag{417}$$

mit $\alpha = 25^\circ$. Zur Berechnung der numerischen Werte werden die SM-Parameter aus [15] bzw. Anhang H benutzt. Die Beiträge zu den Wilson-Koeffizienten an der Skala $\mu_0 = M_W$ sind in Tabelle 3 zusammengefaßt.

Bei der Berechnung des Verzweigungsverhältnisses nutzt man anstelle der originalen Wilson-Koeffizienten $C_i(\mu)$ die sogenannten *effektiven* Wilson-Koeffizienten:

$$C_i^{\text{eff}}(\mu) \equiv \begin{cases} C_i(\mu) & i = 1, 2, 4 \\ C_i(\mu) + \sum_{j=1}^6 y_j C_j(\mu) & i = 7 \\ C_i(\mu) + \sum_{j=1}^6 z_j C_j(\mu) & i = 8 \end{cases} \quad . \tag{418}$$

$\delta^{SM} C_7^{(0)}(M_W) = -0.197$	$\delta^{SM} C_8^{(0)}(M_W) = -0.098$	
$\delta^{H^-} C_7^{(0)}(M_W) = -0.279$	$\delta^{H^-} C_8^{(0)}(M_W) = -0.211$	
$\delta^{\tilde{\chi}^-} C_7^{(0)}(M_W) = 0.272$	$\delta^{\tilde{\chi}^-} C_8^{(0)}(M_W) = 0.148$	
$\delta^{SM} C_7^{(1)}(M_W) = -2.49$	$\delta^{SM} C_8^{(1)}(M_W) = -2.22$	$\delta^{SM} C_4^{(1)}(M_W) = -0.42$
$\delta^{H^-} C_7^{(1)}(M_W) = 5.24$	$\delta^{H^-} C_8^{(1)}(M_W) = 2.85$	$\delta^{H^-} C_4^{(1)}(M_W) = 0.02$
$\delta^{\tilde{\chi}^-} C_7^{(1)}(M_W) = -0.24$	$\delta^{\tilde{\chi}^-} C_8^{(1)}(M_W) = 0.18$	$\delta^{\tilde{\chi}^-} C_4^{(1)}(M_W) = 0.08$
$\delta_q^{\tilde{\chi}^-} C_7^{(1)}(M_W) = -2.22$	$\delta_q^{\tilde{\chi}^-} C_8^{(1)}(M_W) = -1.49$	

Tabelle 3: Numerische Beiträge zu den Wilson-Koeffizienten. δ^{SM} , δ^H bzw. $\delta^{\tilde{\chi}^-}$ indizieren die Beiträge vom SM, dem 2HDM bzw. dem Chargino-Sektor. Beiträge von Diagrammen mit dem quartischen Vertex entstehen nur auf dem Zweischleifen-Niveau und werden durch $\delta_q^{\tilde{\chi}^-}$ hervorgehoben.

Die Zahlen y_j und z_j sind so definiert, daß die LO-Matrixelemente für $b \rightarrow s \gamma$ bzw. $b \rightarrow s g$ proportional sind zu den LO-Termen in C_7^{eff} bzw. C_8^{eff} . Im \overline{MS} -Schema mit einer vollständig antikommutierender Matrix γ_5 (NDR-Schema) ergeben sie sich zu [15, 17, 86]:

$$y = (0, 0, *, -\frac{4}{9}, *, *) \quad , \quad (419)$$

$$z = (0, 0, *, -\frac{1}{6}, *, *) \quad , \quad (420)$$

wobei „*“ andeuten soll, daß diese Einträge nicht relevant sind, weil die entsprechenden LO-Wilson-Koeffizienten numerisch unterdrückt sind. Das Skalierungsverhalten der effektiven Koeffizienten hat die bekannte Form:

$$\mu \frac{d}{d\mu} C_i^{\text{eff}}(\mu) = C_j^{\text{eff}} \gamma_{ji}^{\text{eff}} \quad , \quad (421)$$

wobei die Matrix der effektiven anomalen Dimension die folgende Entwicklung besitzt:

$$\hat{\gamma}^{\text{eff}}(\mu) = \frac{\alpha_S(\mu)}{4\pi} \hat{\gamma}^{(0),\text{eff}} + \frac{\alpha_S^2(\mu)}{(4\pi)^2} \hat{\gamma}^{(1),\text{eff}} \quad . \quad (422)$$

Die Koeffizienten $\hat{\gamma}^{(0),\text{eff}}$ und $\hat{\gamma}^{(1),\text{eff}}$ der Entwicklung sind bekannt [15]. Insbesondere die Berechnung von $\hat{\gamma}^{(1),\text{eff}}$ ist sehr involviert und war das Hauptresultat in [15, 71].

Der effektive Wilson-Koeffizient wird ebenfalls nach $\alpha_s(\mu)$ entwickelt:

$$C_i^{\text{eff}}(\mu) = C_i^{(0),\text{eff}}(\mu) + \frac{\alpha_S(\mu)}{(4\pi)^2} C_i^{(1),\text{eff}}(\mu) \quad . \quad (423)$$

Um die Lösung der Renormierungsgruppengleichung (RGE) zu erhalten, muß die Matrix der anomalen Dimension diagonalisiert werden. Das dadurch entstehende System entkoppelter, linearer Differentialgleichungen für die effektiven Wilson-Koeffizienten läßt sich einfach lösen. Die dafür benötigten Anfangsbedingungen sind in dieser Arbeit berechnet worden:

$$C_2^{(0),\text{eff}}(M_W) = 1 \quad , \quad (424)$$

$$C_i^{(0),\text{eff}}(M_W) = 0 \quad (i = 1, 4) \quad , \quad (425)$$

$$C_7^{(0),\text{eff}}(M_W) = \delta^{SM} C_7^{(0)} + \delta^H C_7^{(0)} + \delta^{\tilde{\chi}^-} C_7^{(0)} \quad , \quad (426)$$

$$C_8^{(0),\text{eff}}(M_W) = \delta^{SM} C_8^{(0)} + \delta^H C_8^{(0)} + \delta^{\tilde{\chi}^-} C_8^{(0)} \quad , \quad (427)$$

$$C_1^{(1),\text{eff}}(M_W) = 15 \quad , \quad (428)$$

$$C_2^{(1),\text{eff}}(M_W) = 0 \quad , \quad (429)$$

$$C_4^{(1),\text{eff}}(M_W) = \delta^{SM} C_4^{(1)} + \delta^H C_4^{(1)} + \delta^{\tilde{\chi}^-} C_4^{(1)} \quad , \quad (430)$$

$$C_7^{(1),\text{eff}}(M_W) = \delta^{SM} C_7^{(1)} + \delta^H C_7^{(1)} + \delta^{\tilde{\chi}^-} C_7^{(1)} + \delta_q^{\tilde{\chi}^-} C_7^{(1)} - \frac{4}{9} C_4^{(1),\text{eff}}(M_W) \quad , \quad (431)$$

$$C_8^{(1),\text{eff}}(M_W) = \delta^{SM} C_8^{(1)} + \delta^H C_8^{(1)} + \delta^{\tilde{\chi}^-} C_8^{(1)} + \delta_q^{\tilde{\chi}^-} C_8^{(1)} - \frac{1}{6} C_4^{(1),\text{eff}}(M_W) \quad . \quad (432)$$

Die Lösung der RGE für den wichtigen Wilson-Koeffizienten von \hat{P}_7 lauten in NLLA:

$$C_7^{(0),\text{eff}}(\mu) = \eta^{\frac{16}{23}} C_7^{(0),\text{eff}}(M_W) + \frac{8}{3} \left(\eta^{\frac{14}{23}} - \eta^{\frac{16}{23}} \right) C_8^{(0),\text{eff}}(M_W) + \sum_{i=1}^8 h_i \eta^{a_i} \quad , \quad (433)$$

$$\begin{aligned} C_7^{(1),\text{eff}}(\mu) &= \eta^{\frac{39}{23}} C_7^{(1),\text{eff}}(M_W) + \frac{8}{3} \left(\eta^{\frac{37}{23}} - \eta^{\frac{39}{23}} \right) C_8^{(1),\text{eff}}(M_W) \\ &+ \left(\frac{297664}{14283} \eta^{\frac{16}{23}} - \frac{7164416}{357075} \eta^{\frac{14}{23}} + \frac{256868}{14283} \eta^{\frac{37}{23}} - \frac{6698884}{357075} \eta^{\frac{39}{23}} \right) C_8^{(0),\text{eff}}(M_W) \\ &+ \frac{37208}{4761} \left(\eta^{\frac{39}{23}} - \eta^{\frac{16}{23}} \right) C_7^{(0),\text{eff}}(M_W) \\ &+ \sum_{i=1}^8 (e_i \eta C_4^{(1),\text{eff}}(M_W) + (f_i + g_i \eta) C_2^{(0),\text{eff}}(M_W)) \eta^{a_i} \quad . \end{aligned} \quad (434)$$

Hierbei ist: $\eta = \alpha_S(M_W)/\alpha_S(\mu)$. Die Vektoren a , e , f , h , k und l haben die Form [15]:

$$a = \left\{ \frac{14}{23}, \frac{16}{23}, \frac{6}{23}, -\frac{12}{23}, 0.4086, -0.4230, -0.8994, 0.1456 \right\} \quad ,$$

$$\begin{aligned}
e &= \left\{ \frac{4661194}{816831}, -\frac{8516}{2217}, 0, 0, -1.9043, -0.1008, 0.1216, 0.0183 \right\} , \\
f &= \{-17.3023, 8.5027, 4.5508, 0.7519, 2.0040, 0.7476, -0.5385, 0.0914\} , \\
h &= \left\{ \frac{626126}{272277}, -\frac{56281}{51730}, -\frac{3}{7}, -\frac{1}{14}, -0.6494, -0.038, -0.0186, -0.0057 \right\} , \\
k &= \{9.9372, -7.4878, 1.2688, -0.2925, -2.2923, -0.1461, 0.1239, 0.0812\} , \\
l &= \{0.5784, -0.3921, -0.1429, 0.0476, -0.1275, 0.0317, 0.0078, -0.0031\} .
\end{aligned}$$

Die anderen Wilson-Koeffizienten werden für eine komplette NLO-Studie des Prozesses $b \rightarrow X_s \gamma$ nur in LLA-Näherung benötigt [15]:

$$C_1^{(0),\text{eff}}(\mu) = \left(-\eta^{-\frac{12}{23}} + \eta^{\frac{6}{23}} \right) C_2^{(0),\text{eff}}(M_W) , \quad (435)$$

$$C_2^{(0),\text{eff}}(\mu) = \left(\frac{1}{3} \eta^{-\frac{12}{23}} + \frac{2}{3} \eta^{\frac{6}{23}} \right) C_2^{(0),\text{eff}}(M_W) , \quad (436)$$

$$\begin{aligned}
C_4^{(0),\text{eff}}(\mu) &= \left(\frac{1}{9} \eta^{-\frac{12}{23}} + \frac{1}{21} \eta^{\frac{6}{23}} \right. \\
&\quad \left. + 0.0237 \eta^{0.4089} - 0.0173 \eta^{-0.4230} - 0.1336 \eta^{-0.8994} - 0.0316 \eta^{0.1456} \right) C_2^{(0),\text{eff}}(M_W) , \quad (437)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_8^{(0),\text{eff}}(\mu) &= \left(C_8^{(0)}(M_W) + \frac{313063}{363036} C_2^{(0),\text{eff}}(M_W) \right) \eta^{\frac{14}{23}} \\
&\quad + \left(-0.9135 \eta^{0.4089} + 0.0873 \eta^{-0.4230} - 0.0571 \eta^{-0.8994} + 0.0209 \eta^{0.1456} \right) C_2^{(0),\text{eff}}(M_W) . \quad (438)
\end{aligned}$$

Anhand von Gleichung (434) wird nun klar, weshalb der Prozeß $b \rightarrow s g$ bis einschließlich NLO berechnet werden mußte. Für $\mu = \mu_b = 5 \text{ GeV}$ ergeben sich die folgenden Zahlenwerte für die effektiven Wilson-Koeffizienten im SM und MSSM:

$$C_{k\text{ SM}}^{(0),\text{eff}}(\mu_b) = (-0.4802, 1.0229, 0.0640, -0.3116, -0.1479) \quad \text{mit } k = (1, 2, 4, 7, 8) ,$$

$$C_{7\text{ SM}}^{(1),\text{eff}}(\mu_b) = 0.4478 ,$$

$$\begin{aligned}
C_{k\text{ MSSM}}^{(0),\text{eff}}(\mu_b) &= (-0.4802, 1.0229, 0.0640, -0.3528 - i 1.5197 \cdot 10^{-6}, -0.2210 - i 2.6688 \cdot 10^{-7}) \\
&\quad \text{mit } k = (1, 2, 4, 7, 8) ,
\end{aligned}$$

$$C_{7\text{ MSSM}}^{(1),\text{eff}}(\mu_b) = 1.5125 + i 0.1105 \cdot 10^{-4} .$$

Anhand dieser Zahlenwerte ist erkennbar, daß die effektiven LO-Wilson-Koeffizienten für $C_4^{(0),\text{eff}}(\mu_b)$ numerisch nicht relevant sind.

Nun werden die Ergebnisse aus [17] benutzt, um die Zerfallsrate $b \rightarrow X_s \gamma$ angeben zu können. Es soll hier jedoch wie in [19, 77] ein niedrigerer Photonen-Energie-Cut-off benutzt werden:

$$E_\gamma > (1 - \delta) E_\gamma^{\max} \equiv (1 - \delta) \frac{m_b}{2} \quad . \quad (439)$$

Für die Zerfallsrate gilt [17, 15]:

$$\begin{aligned} \Gamma[b \rightarrow X_s \gamma]^{E_\gamma > (1-\delta) E_\gamma^{\max}} &= \Gamma[b \rightarrow s \gamma] + \Gamma[b \rightarrow s \gamma g]^{E_\gamma > (1-\delta) E_\gamma^{\max}} \\ &= \frac{G_F^2 \alpha_{em}}{32 \pi^4} |V_{ts}^* V_{tb}|^2 m_{b,\text{pole}}^3 m_{b,\overline{MS}}^2(m_b) (|D|^2 + A) \end{aligned} \quad (440)$$

mit

$$D = C_7^{(0),\text{eff}}(\mu) + \frac{\alpha_S(\mu)}{4 \pi} \left(C_7^{(1),\text{eff}}(\mu) + \sum_{i=1}^8 C_i^{(0),\text{eff}}(\mu) \left[r_i + \hat{\gamma}_{i7}^{(0),\text{eff}} \ln \frac{m_b}{\mu} \right] \right) \quad (441)$$

und

$$A = \left(e^{-\alpha_S(\mu) \ln(\delta) (7+2 \ln(\delta))/3\pi} - 1 \right) |C_7^{(0),\text{eff}}(\mu)|^2 + \frac{\alpha_S(\mu)}{\pi} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^8 C_i^{(0),\text{eff}}(\mu) C_j^{(0),\text{eff}}(\mu) f_{ij}(\delta) \quad . \quad (442)$$

Die expliziten Ausdrücke für r_i und die Funktionen f_{ij} sind in Ref. [15] gegeben.

Die Zerfallsrate in Gleichung (440) hat zwei Nachteile, zum einen enthält sie große Unsicherheiten wegen ihrer Abhängigkeit von $m_{b,\text{pole}}^5$ und zum anderen besitzt sie Fehler durch die CKM-Matrix-Elemente. Diese Fehler können durch die Normierung der Zerfallsrate auf die Rate für den semileptonischen Zerfall $b \rightarrow X_c e \bar{\nu}_e$ reduziert werden [90]:

$$\Gamma[b \rightarrow X_c e \bar{\nu}_e] = \frac{G_F^2 m_{b,\text{pole}}^5}{192 \pi^3} \kappa(z) g(z) |V_{cb}|^2 \quad (443)$$

mit dem Phasenraumfaktor:

$$g(m_{c,\text{pole}}^2/m_{b,\text{pole}}^2) = g(z) = 1 - 8z + 8z^3 - z^4 - 12z^2 \ln z \quad (444)$$

und der NLO-QCD-Korrektur zum semileptonische Zerfall [91]:

$$\kappa(z) = 1 - \frac{2 \alpha_s(m_b)}{3 \pi} \frac{h(z)}{g(z)} \quad . \quad (445)$$

Die Funktion $h(z)$ ist in [15, 93] explizit gegeben. Somit ergibt sich das störungstheoretische Endergebnis zu:

$$R_{\text{quark}}(\delta) = \frac{\Gamma[b \rightarrow X_s \gamma]^{E_\gamma > (1-\delta) E_\gamma^{\max}}}{\Gamma[b \rightarrow X_c e \bar{\nu}_e]} = \frac{|V_{ts}^* V_{tb}|^2}{|V_{cb}|^2} \frac{6 \alpha_{em}}{\pi g(z)} \frac{1}{\kappa(z)} \left(1 - \frac{8 \alpha_s(m_b)}{3 \pi} \right) (|D|^2 + A) . \quad (446)$$

Für die elektromagnetische Kopplungskonstante wird $\alpha_{em} = 1/137.036$ benutzt [18], anstelle des Wertes an der Skala M_W wie in [15]. Die hier dargestellte Analyse behandelt keine QED-Korrekturen, deshalb ist die Renormierung von α_{em} sehr willkürlich. Die Renormierung für $q^2 = 0$ erscheint jedoch für eine Emission von reellen Photonen angepaßter.

Der letzte Schritt ist der Übergang von der b -Quark-Zerfallsrate zur B -Mesonen-Zerfallsrate. Dazu werden Ergebnisse der *Heavy Quark Effective Theory* (HQET) [92] benutzt. Es gilt [15, 96]:

$$\begin{aligned} BR(B \rightarrow X_s \gamma) &= BR(B \rightarrow X_c e \bar{\nu}_e) R_{\text{quark}}(\delta^{\max}) \\ &\times \left(1 - \frac{\delta_{sl}^{NP}}{m_b^2} + \frac{\delta_{rad}^{NP}}{m_b^2} - \frac{1}{9} \frac{\lambda_2}{m_c^2} \frac{(C_2^{(0),\text{eff}} - \frac{1}{6} C_1^{(0),\text{eff}})}{C_7^{(0),\text{eff}}} \right) . \end{aligned} \quad (447)$$

Hierbei parametrisieren die Größen δ_{sl}^{NP} und δ_{rad}^{NP} nichtstörungstheoretische Beiträge zum semi-leptonischen und radiativen B -Meson Zerfall. Entsprechend den Ausführungen in [94, 95] kann man diese Funktionen mit den HQET-Parametern λ_1 und λ_2 schreiben:

$$\delta_{sl}^{NP} = \frac{1}{2} \lambda_1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{6(1-z)^4}{g(z)} \right) \lambda_2 , \quad (448)$$

$$\delta_{rad}^{NP} = \frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{9}{2} \lambda_2 , \quad (449)$$

wobei der explizite Ausdruck für $g(z)$ bereits in (444) gegeben ist. Der nur sehr ungenau bekannte Parameter λ_1 hebt sich in Gleichung (447) weg und für λ_2 wird benutzt: $\lambda_2 = 0.12 \text{ GeV}^2$. Als Wert für $BR(B \rightarrow X_c e \bar{\nu}_e)$ wird 10.4% eingesetzt.

Das Free-Quark-Modell war für die Berechnung der Wilson-Koeffizienten geeignet. Um jedoch die Wilson-Koeffizienten mit experimentell zugänglichen Größen vergleichen zu können, muß der hadronische Inhalt der Mesonen parametrisiert werden. Dies wurde hier kurz skizziert.

Setzt man nun alle numerischen Werte in Gleichung (447), ein so erhält man für das Verzweigungsverhältnis im MSSM:

$$BR[B \rightarrow X_s \gamma] \approx 3.15 \times 10^{-4} , \quad (450)$$

welches im Rahmen der experimentellen Fehler mit den Ergebnissen der CLEO- und ALEPH-Kollaboration übereinstimmt. Dieses Resultat ist ebenfalls nahe dem SM-Verzweigungsverhältnisses:

$$BR[B \rightarrow X_s \gamma] \approx 3.3 \times 10^{-4} . \quad (451)$$

Würde man die Zweischleifen-Korrekturen, die vom MSSM- und vom 2HDM-Sektor kommen, vernachlässigen, dann wäre das Resultat:

$$BR[B \rightarrow X_s \gamma] \approx 3.69 \times 10^{-4} \quad . \quad (452)$$

Die Differenz zwischen diesem Resultat und dem in (450) gegebenen ist nahe dem gegenwärtigen experimentellem Fehler. Diese Abweichung ist generisch, erfordert somit kein genaues Abstimmen der MSSM-Parameter. Es ist zu erkennen, daß die gluonischen Korrekturen im 2HDM und im MSSM eine wichtige Rolle spielen, um zukünftigen Experimenten gerecht zu werden.

4.5 Schlußfolgerungen

Die Präsentation von generischen Resultaten für die Zerfälle $b \rightarrow s \gamma$ und $b \rightarrow s g$ und die Verifikation der bereits bekannten Resultate im SM, 2HDM und Chargino-Sektor waren das Hauptziel dieses Kapitels.

Im Limes einer schweren Gluino-Masse sind die hier gegebenen Ergebnisse vollständig. Durch die Analytizität der Resultate ist ein Abtasten des Parameterraumes z. B. mittels Monte-Carlo-Verfahren möglich. Aufgrund der großen Anzahl freier MSSM-Parameter machen diese Untersuchungen jedoch erst Sinn, wenn experimentelle Evidenzen für das MSSM oder andere Erweiterungen existieren und somit die Grenzen für die Parameter eingeschränkt worden sind. Man kann aber bereits an dieser Stelle sagen, daß gluonische Korrekturen im MSSM für große Bereiche des Parameterraumes wichtige Beiträge liefern.

Um auch den Fall leichter Gluinos betrachten zu können, müssen Gluino-Korrekturen bestimmt werden. Diese Rechnungen sind sehr involviert, da zum einen der Majorana-Charakter der Gluinos und Neutralinos eine Rolle spielen wird und zum anderen Diagramme mit nur schweren Teilchen zu untersuchen sind.

5 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden das $B\bar{B}$ -Mixing und der Zerfall $B \rightarrow X_s \gamma$ einschließlich der QCD-Korrekturen bis zur Ordnung α_S , d. h. in Next-to-Leading-Order-Approximation untersucht. Bei beiden Prozessen handelt es sich um Flavor Changing Neutral Current (FCNC) Prozesse, welche im Standardmodell (SM) und allen hier betrachteten Erweiterungen in Born-Approximation verboten sind. Deshalb sind die $B\bar{B}$ -Oszillation und der Zerfall $B \rightarrow X_s \gamma$ sehr gut geeignet, nach neuer Physik zu suchen, da Beiträge möglicher Erweiterungen des Standardmodells prinzipiell von derselben Größenordnung wie im Rahmen des Standardmodells sein können.

In niedrigster Ordnung der Störungstheorie werden die untersuchten Reaktionen durch die elektroschwache Theorie (Box- und Pinguin-Diagramme) mit einer typischen Energieskala von $\mathcal{O}(\mu_W \approx M_W)$ beschrieben. Der Prozeß selbst findet bei einer Energie der Ordnung $\mathcal{O}(\mu_b \approx m_b)$ statt. Dieser große Skalenunterschied ermöglicht die Beschreibung im Rahmen einer effektiven Theorie. Die dabei verwendete Wilsonsche Operatorproduktentwicklung führt zu einer exakten Faktorisierung in lang- und kurzreichweitige Anteile. Es sind dazu drei Schritte notwendig. Im ersten Schritt werden die 1-Teilchen irreduziblen Diagramme der vollen Theorie (Standardmodell, 2-Higgs-Dublett-Modell, Links-Rechts-Modelle, Minimales Supersymmetrisches Standardmodell) mit den 1-Teilchen irreduziblen Diagrammen der effektiven Theorie gleichgesetzt (Matching-Prozedur). Unter der vollen Theorie versteht man dabei eine Theorie, die sowohl die leichten, als auch die schweren Felder als dynamische Freiheitsgrade enthält. Innerhalb der effektiven Theorie sind die schweren Freiheitsgrade ausintegriert. Aus der Matching-Prozedur folgen die Wilson-Koeffizienten an der elektroschwachen Skala ($\mathcal{O}(M_W)$). Die Wilson-Koeffizienten stellen effektive Kopplungskonstanten dar, die implizit die schweren Freiheitsgrade enthalten. Der zweite Schritt besteht im Skalieren der Wilson-Koeffizienten von der Hochenergieskala μ_W zur hadronischen Skala μ_b . Das Skalieren erfolgt mit Renormierungsgruppentechniken und führt in Leading-Order-Approximation zu einer Aufsummation von führenden Logarithmen $(\alpha_S \ln M_W^2/\mu^2)^n$ und im Next-to-Leading-Order-Fall zusätzlich zur Aufsummation von $\alpha_S (\alpha_S \ln M_W^2/\mu^2)^n$ zu allen Ordnungen der Störungstheorie. Diese Aufsummation stellt eine Verbesserung der naiven Störungstheorie dar. Im dritten Teil müssen die hadronischen Matrixelemente der Operatoren an der Skala μ_b bestimmt werden. Zusätzlich berücksichtigt man nichtstörungstheoretische Beiträge zur Reduktion des theoretischen Fehlers beim Übergang von freien Quarks zu Mesonen. Diese Anteile, welche eine Folge des Confinements der QCD sind, können teilweise mit Hilfe der Heavy Quark Effective Theory (HQET) und der Gitter-QCD behandelt werden. Aufgrund der sehr unbefriedigenden Niederenergiebeschreibung der QCD liefern sie den größten theoretischen Fehler.

Die effektive Seite ist identisch für das Standardmodell und alle hier betrachteten Erweiterungen und muß deshalb nur einmal berechnet werden. Die Hauptschwierigkeit innerhalb dieser Arbeit stellt die Berechnung der 2-loop-Diagramme innerhalb der vollen Theorie dar.

Für das $B\bar{B}$ -Mixing wurden die bekannten Next-to-Leading-Order-Ergebnisse des Standardmodells [59] verifiziert, und die Rechnung konnte auf das 2-Higgs-Dublett-Modell im low-tan β -Regime [60] verallgemeinert werden. Der Parameter tan β ist ebenso wie die Massen der neu-

tralen und geladenen Higgs-Teilchen eine fundamentale Größe der Theorie, der in der hier betrachteten Approximation kleiner als 5 angenommen werden muß (dieser Parameterbereich wird von supersymmetrischen Theorien favorisiert).

Die bekannten Leading-Order-Resultate innerhalb des MSSM [76] wurden ebenfalls bestätigt. Es konnte gezeigt werden, daß die Behandlung der leichten Felder für die Bestimmung der Wilson-Koeffizienten keine Rolle spielt. Dazu wurden die Massen der leichten Quarks zum einem als IR-Regulator benutzt und zum anderen wurden die IR-Divergenzen dimensional regularisiert [60, 61].

Die hier untersuchten Prozesse enthalten relativ große Beiträge durch QCD-Korrekturen. Neben diesem Sachverhalt gibt es eine weitere Motivation zur Durchführung einer involvierten Next-to-Leading-Order-Rechnung: die Reduktion des theoretischen Fehlers (Skalenunsicherheiten). Die Next-to-Leading-Order-Korrekturen geben eine Veränderung der Massenaufspaltung Δm_B im Standardmodell von ca. 15% und im 2-Higgs-Dublett-Modell von ca. 18% gegenüber dem Leading-Order-Wert. Die Beiträge der geladenen Higgs-Bosonen führen zu einer Erhöhung der Amplitude gegenüber dem Standardmodell und würden somit eine Erniedrigung von $|V_{ts} V_{tb}^*|$ erzwingen, wenn alle anderen Parameter festgehalten werden.

Für den Zerfall $B \rightarrow X_s \gamma$ wurden als Erweiterungen des Standardmodells das 2-Higgs-Dublett-Modell, Links-Rechts-Modelle und das Minimale Supersymmetrische Standardmodell untersucht. Die Rechnungen sind auf der vollen und effektiven Seite wesentlich komplizierter als die entsprechenden Rechnungen für das $B\bar{B}$ -Mixing. Die Ursachen dafür sind die Existenz von überlappenden Divergenzen, eine größere Anzahl von Operatoren in der effektiven Theorie und die Notwendigkeit, bis zur 2. Ordnung in den äußeren Impulsen zu entwickeln. Es wurden die bekannten Ergebnisse im Standardmodell [13, 79], im 2-Higgs-Dublett-Modell [80, 81] und im Chargino-Sektor des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells [89] bestätigt. Neue Resultate wurden im Links-Rechts-Modell, sowie im Neutralino-Sektor und Gluino-Sektor gefunden [77]. Die hier präsentierten supersymmetrischen Rechnungen beinhalten gluonische Korrekturen zum Grundprozeß und stellen somit noch keine vollständige Analyse dar, da Gluino-Korrekturen fehlen. Diese Rechnungen sind extrem involviert, da Diagramme mit nur schweren Teilchen betrachtet werden müssen und der Majorana-Charakter der Gluinos und Neutralinos eine Rolle spielt. Die hier präsentierten Rechnungen werden jedoch in sich vollständig für $m_{\text{gluino}} \gg M_W$. Innerhalb dieses Grenzwertes wurde das Verzweigungsverhältnis $BR[B \rightarrow X_s \gamma]$ bestimmt, und es konnte gezeigt werden, daß Parametersätze existieren, für die das Minimale Supersymmetrische Standardmodell konsistent mit den experimentellen Limits ist. Desweiteren sind auch hier die α_S -Korrekturen notwendig, um einen sinnvollen Vergleich mit dem Experiment durchführen zu können, da diese Beiträge in der Größenordnung um 10% liefern. Für alle hier betrachteten Fälle wurden analytische Resultate erzeugt, welche insbesondere für die Supersymmetrie wichtig werden, wenn die ersten experimentellen Evidenzen gefunden worden sind und die große Zahl der freien Parameter eingeschränkt ist.

Eine Verallgemeinerung der Rechnung für beliebige Gluino-Massen ist sowohl für das $B\bar{B}$ -Mixing als auch für das Studium des Zerfalls $B \rightarrow X_s \gamma$ wünschenswert.

A Bezeichnungen und Konventionen

In dieser Arbeit wird die folgende Konvention für den Links- bzw. Rechtsprojektor benutzt:

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \quad , \quad P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad , \quad (453)$$

desweiteren gilt: $\gamma_\mu L = \gamma_\mu P_L$ und analog für P_R und kontravariante Indizes. Weiterhin gilt für die Fermi-Konstante und den schwachen Mischungswinkel:

$$G_F = \frac{\sqrt{2} g_2^2}{8 m_W^2} \quad , \quad (454)$$

$$\sin \Omega_W = \frac{e}{g_2} \quad . \quad (455)$$

Der in NLO-Rechnungen häufig auftretende Dilogarithmus ist wie folgt definiert [58]:

$$\text{Li}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad \text{für} \quad |x| \leq 1 \quad (456)$$

oder

$$\begin{aligned} \text{Li}_2(x) &= - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln(1-x t)}{t} dt \\ &= - \int_{1-x}^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1/x} dt \quad . \end{aligned} \quad (457)$$

Zu beachten ist, daß es neben den zahlreichen oben aufgeführten äquivalenten Definitionen auch andere Festlegungen gibt. So stimmt die hier präsentierte Festlegung mit der von *Mathematica* [67] überein, jedoch nicht mit der in *Maple* [68] getroffenen. Es gilt dort die folgende Umrechnung: $\text{Li}_2^{\text{Mathematica}}(1-x) = \text{Li}_2^{\text{Maple}}(x)$. Der Dilogarithmus besitzt einige wichtige Eigenschaften:

$$\text{Li}_2(1-x) + \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} \ln^2(x) \quad , \quad (458)$$

$$\text{Li}_2(x) + \text{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x) \quad , \quad (459)$$

$$\text{Li}_2\left(\frac{1}{x}\right) - \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \ln(x) \ln(x-1) - \ln^2(x) \quad . \quad (460)$$

B Feynman-Regeln

In dieser Arbeit wurde durchgängig die Feynman-'t Hooft-Eichung für die massiven Eichbosonen gewählt. Alle externen Gluonen und Photonen sind Hintergrundfelder (back-ground-field-gauge) [57].

Damit haben die Propagatoren die folgende Gestalt:

$$\text{Fermion : } \frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad , \quad (461)$$

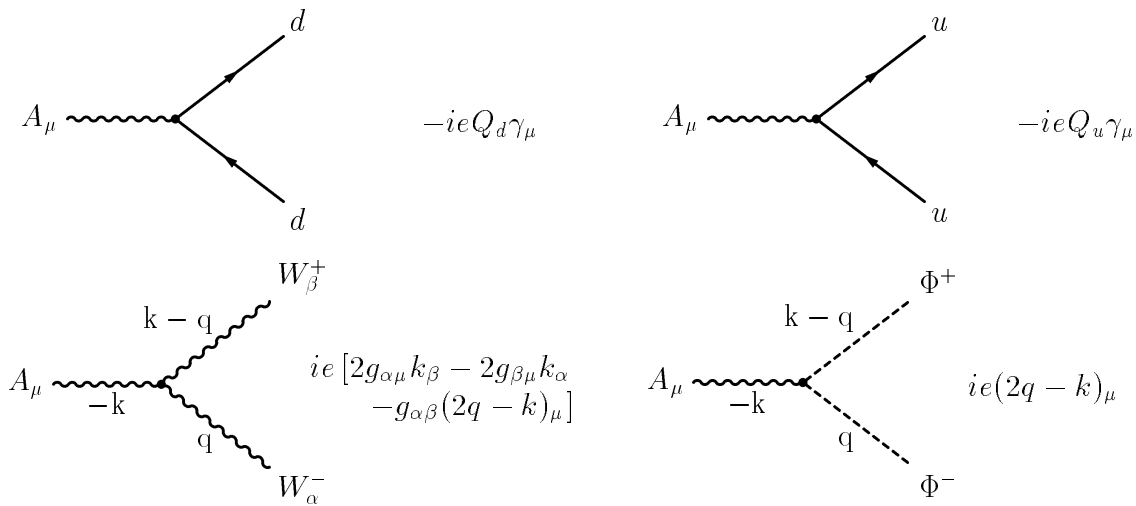
$$\text{Skalar : } \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad , \quad (462)$$

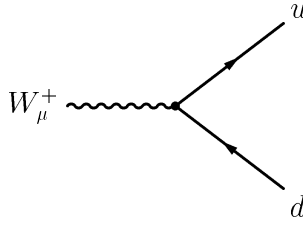
$$\text{Massives Eichboson : } \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad , \quad (463)$$

$$\text{Gluon : } \frac{-ig_{\mu\nu}\delta_{ab}}{q^2 + i\epsilon} \quad . \quad (464)$$

B.1 Das Standardmodell

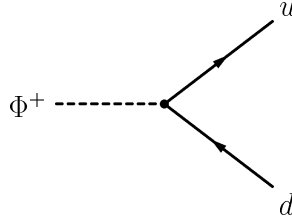
Bei den Feynman-Regeln wurde die folgende Übereinkunft getroffen: die Impulse der Bosonen zeigen zum Vertex und die Impulse der Fermionen haben dieselbe Orientierung wie die Fermionlinien.





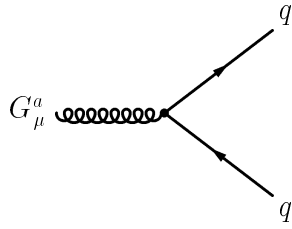
A Feynman diagram showing a \$W^+\$ boson (wavy line) entering a vertex from the left. From this vertex, two fermion lines emerge: an up quark (\$u\$) going up and to the right, and a down quark (\$d\$) going down and to the right.

$$\frac{-ig_2}{\sqrt{2}} V_{ud} \gamma_\mu P_L$$



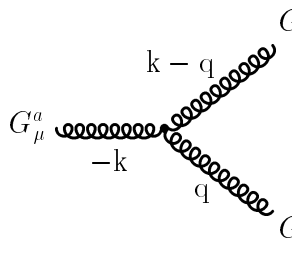
A Feynman diagram showing a \$\Phi^+\$ boson (dashed line) entering a vertex from the left. From this vertex, two fermion lines emerge: an up quark (\$u\$) going up and to the right, and a down quark (\$d\$) going down and to the right.

$$\frac{ig_2}{\sqrt{2}} V_{ud} \left[\frac{m_u}{M_W} P_L - \frac{m_d}{M_W} P_R \right]$$



A Feynman diagram showing a \$G_\mu^a\$ boson (coiled line) entering a vertex from the left. From this vertex, two fermion lines emerge, both labeled \$q\$, going up and to the right and down and to the right.

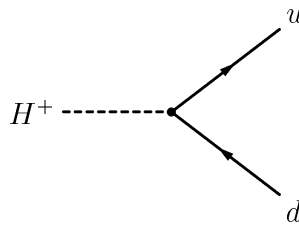
$$-ig_3 \mathbf{T}^a \gamma_\mu$$



A Feynman diagram showing a \$G_\mu^a\$ boson (coiled line) entering a vertex from the left. From this vertex, three other \$G\$ bosons emerge: \$G_\alpha^b\$ going up and to the right, \$G_\beta^c\$ going down and to the right, and a coiled line labeled \$k-q\$ going up and to the left. The incoming line is labeled \$-k\$ and the outgoing lines are labeled \$q\$ and \$q\$.

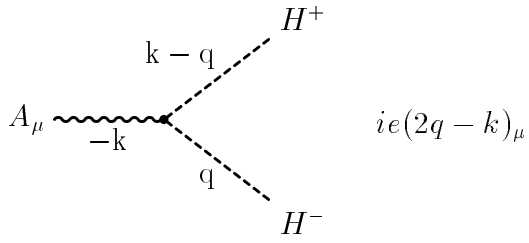
$$g_3 f_{acb} [2g_{\alpha\mu} k_\beta - 2g_{\beta\mu} k_\alpha + g_{\alpha\beta} (2q - k)_\mu]$$

B.2 Das 2-Higgs-Dublett-Modell

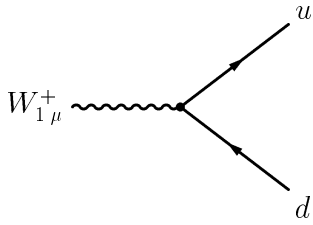


A Feynman diagram showing an \$H^+\$ boson (dashed line) entering a vertex from the left. From this vertex, two fermion lines emerge: an up quark (\$u\$) going up and to the right, and a down quark (\$d\$) going down and to the right.

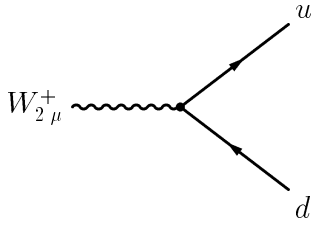
$$\frac{ig_2}{\sqrt{2}} V_{ud} \left[\frac{m_u}{M_W} \cot \beta P_L + \frac{m_d}{M_W} \tan \beta P_R \right]$$



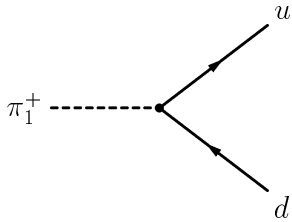
B.3 Links-Rechts-Modelle



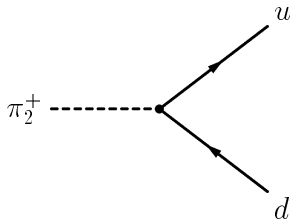
$$\frac{-i}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \left[g_L \cos \xi (V_L)_{ud} P_L + g_R \sin \xi e^{i\alpha} (V_R)_{ud} P_R \right]$$



$$\frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \left[g_L \sin \xi (V_L)_{ud} P_L - g_R \cos \xi e^{i\alpha} (V_R)_{ud} P_R \right]$$

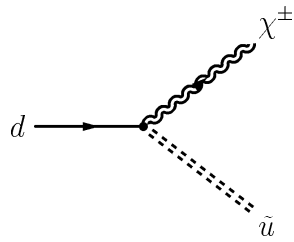


$$\frac{i}{\sqrt{2}} \left[\left(g_L \frac{M_D}{M_1} \cos \xi (V_L)_{ud} - g_R \frac{M_U}{M_1} \sin \xi e^{i\alpha} (V_R)_{ud} \right) P_R \right. \\ \left. - \left(g_L \frac{M_U}{M_1} \cos \xi (V_L)_{ud} - g_R \frac{M_D}{M_1} \sin \xi e^{i\alpha} (V_R)_{ud} \right) P_L \right]$$

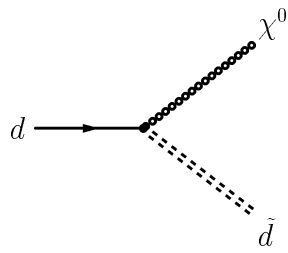


$$\frac{i}{\sqrt{2}} \left[- \left(g_L \frac{M_D}{M_2} \sin \xi (V_L)_{ud} + g_R \frac{M_U}{M_2} \cos \xi e^{i\alpha} (V_R)_{ud} \right) P_R \right. \\ \left. + \left(g_L \frac{M_U}{M_2} \sin \xi (V_L)_{ud} + g_R \frac{M_D}{M_2} \cos \xi e^{i\alpha} (V_R)_{ud} \right) P_L \right]$$

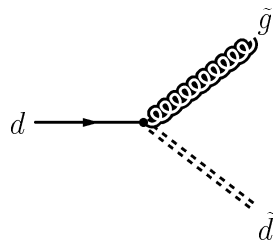
B.4 Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell



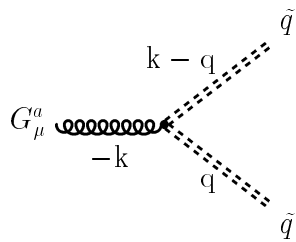
$$i(X_i^{U_L} P_L + X_i^{U_R} P_R)$$



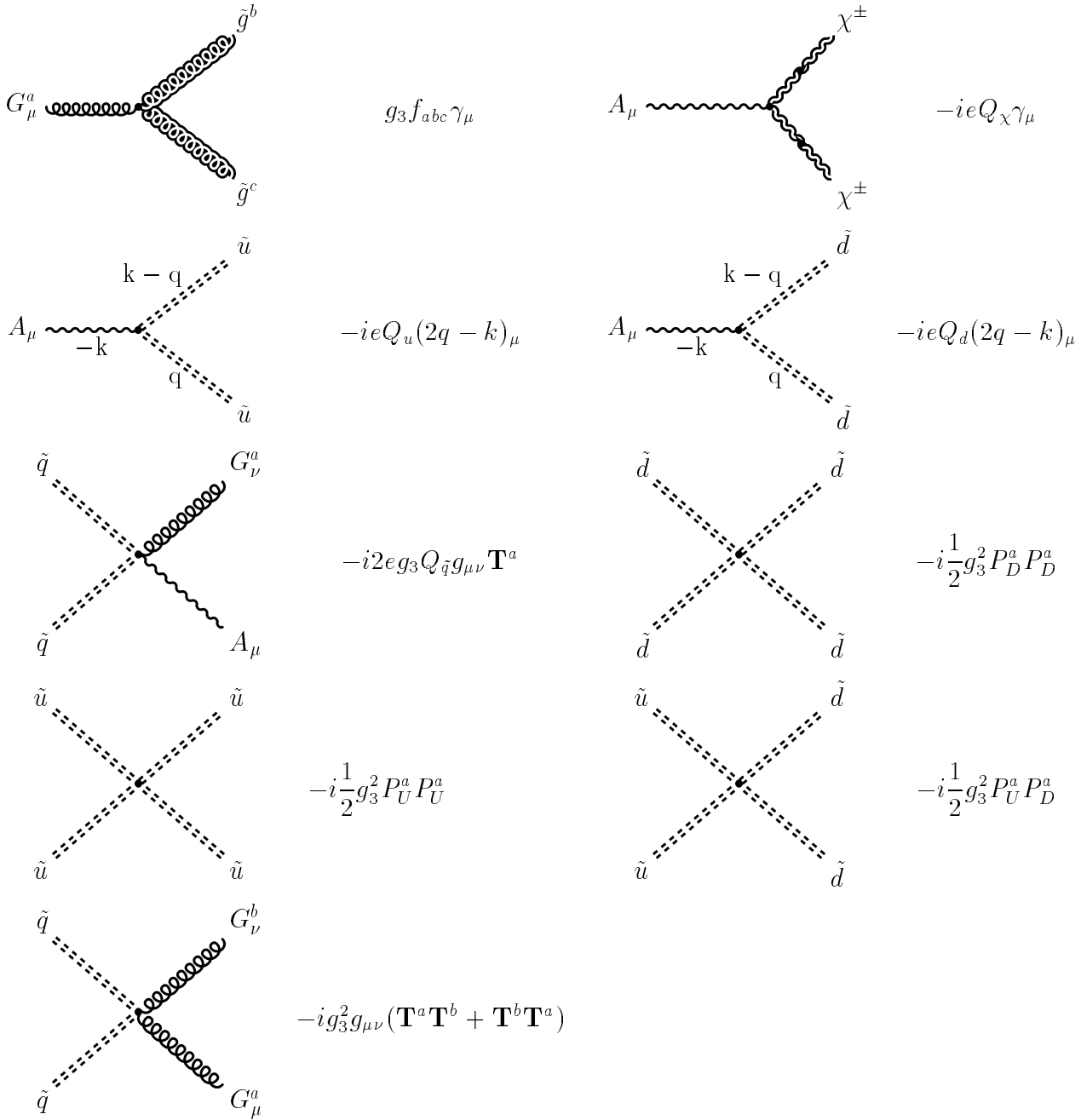
$$i(Z_i^{D_L} P_L + Z_i^{D_R} P_R)$$



$$-i\sqrt{2}g_3(\Gamma^{D_L} P_L - \Gamma^{D_R} P_R)\mathbf{T}^a$$



$$i g_3 \mathbf{T}^a (2q - k)_\mu$$



Dabei sind die Matrizen P_U^a und P_D^a wie folgt definiert :

$$P_U^a \equiv \left[\Gamma^{U_L} \Gamma^{U_L^\dagger} - \Gamma^{U_R} \Gamma^{U_R^\dagger} \right] \mathbf{T}^a, \quad (465)$$

$$P_D^a \equiv \left[\Gamma^{D_L} \Gamma^{D_L^\dagger} - \Gamma^{D_R} \Gamma^{D_R^\dagger} \right] \mathbf{T}^a. \quad (466)$$

C Dirac-Algebra

Es gelten die folgenden Identitäten für Dirac-Matrizen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad , \quad (467)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad , \quad (468)$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad . \quad (469)$$

Im folgenden werden einige sehr nützliche Relationen für Dirac-Matrizen in $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen angegeben:

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta} \quad , \quad (470)$$

$$g_\alpha{}^\alpha = D \quad , \quad (471)$$

$$\gamma_\alpha\gamma^\alpha = D \quad , \quad (472)$$

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\alpha = (-2 + 2\varepsilon)\gamma_\beta \quad , \quad (473)$$

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma^\alpha = 4g_{\beta\delta} - 2\varepsilon\gamma_\beta\gamma_\delta \quad , \quad (474)$$

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\rho\gamma^\alpha = -2\gamma_\rho\gamma_\delta\gamma_\beta + 2\varepsilon\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\rho \quad , \quad (475)$$

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma^\alpha = 2\gamma_\delta\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\beta + 2\gamma_\beta\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_\delta - 2\varepsilon\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\rho\gamma_\sigma \quad , \quad (476)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma^\alpha &= 2\gamma_\delta\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\beta - 2\gamma_\beta\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\lambda\gamma_\delta - 2\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma_\rho \\ &\quad + 2\varepsilon\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\lambda \quad . \end{aligned} \quad (477)$$

Für die Behandlung von Diagrammen mit zwei Fermionen-Strömen werden die folgenden Regeln benötigt, die nur in 4 Dimensionen angegeben werden können:

$$\gamma_\mu\gamma_\omega\gamma_\nu{}_L \otimes \gamma^\nu\gamma^\omega\gamma^\mu{}_L = 4 \cdot \gamma_\omega{}_L \otimes \gamma^\omega{}_L \quad , \quad (478)$$

$$\gamma_\mu\gamma_\omega\gamma_\nu{}_L \otimes \gamma^\mu\gamma^\omega\gamma^\nu{}_L = 16 \cdot \gamma_\omega{}_L \otimes \gamma^\omega{}_L \quad . \quad (479)$$

Die Natur ist maximal paritätsverletzt. Linkshändige Fermionen transformieren sich unter der $SU(2)$ -Gruppe anders als rechtshändige. Anstatt der Benutzung der Projektoren $P_{L/R}$ ist es günstiger, die 2-komponentigen Weyl-Fermionen zu verwenden, wie es im Kapitel 2.3.3 beim Wess-Zumino-Modell erfolgte.

In der 4-komponentigen Sprache gilt für die Dirac-Fermionen:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -i\bar{\Psi}_D\gamma_\mu\partial^\mu\Psi_D - M\bar{\Psi}_D\Psi_D \quad . \quad (480)$$

Bei Benutzung der folgenden Darstellung für die 4×4 Dirac-Matrizen:

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (481)$$

und die Dirac-Spinoren²⁰

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \chi^{+\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\Psi}_D = \left(\chi^\alpha \quad , \quad \xi_\alpha^+ \right) \quad (482)$$

gilt:

$$P_L \Psi_D = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P_R \Psi_D = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{+\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad . \quad (483)$$

Hierbei sind σ_μ die Pauli-Matrizen. Dies bedeutet, daß zur Beschreibung von fermionischen Freiheitsgraden die Weyl-Spinoren ξ und χ herangezogen werden können:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -i\xi^+ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi - i\chi^+ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - M(\chi \xi + \xi^+ \chi^+) \quad . \quad (484)$$

Diese Schreibweise wird vor allem bei Majorana-Spinoren sehr einfach. Im MSSM sind die Gluinos und die Neutralinos Majorana-Fermionen. Majorana-Spinoren ergeben sich aus (482) mit der zusätzlichen Forderung: $\chi = \xi$:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \xi^{+\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\Psi}_M = \left(\xi^\alpha \quad , \quad \xi_\alpha^+ \right) \quad . \quad (485)$$

Die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = -\frac{i}{2} \bar{\Psi}_M \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_M - \frac{1}{2} M \bar{\Psi}_M \Psi_M \quad (486)$$

hat in der 2-dimensionalen Darstellung die Form:

$$\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = -i \xi^+ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi - \frac{1}{2} M(\xi \xi + \xi^+ \xi^+) \quad . \quad (487)$$

Für die Matrizen $\bar{\sigma}_\mu$ und σ_μ aus (481) gelten die folgenden zwei Antikommutationsrelationen:

$$[\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu]_\alpha^\beta = -2 g^{\mu\nu} \delta_\alpha^\beta \quad , \quad (488)$$

$$[\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu]_\alpha^\beta = -2 g^{\mu\nu} \delta_\alpha^\beta \quad . \quad (489)$$

Eine weitere wichtige Definition ist der ladungskonjugierte Spinor:

$$\Psi^C \equiv C \bar{\Psi}^T \quad , \quad (490)$$

wobei C der Ladungskonjugationsoperator ist. Für C gilt in jeder Darstellung:

$$C^+ = C^{-1} \quad , \quad C^T = -C \quad . \quad (491)$$

²⁰Es soll gelten, daß die unteren Komponenten von Ψ immer mit gepunkteten Indizes versehen werden.

Die Anwendung von C auf Ψ führt auf:

$$\Psi^C = C \overline{\Psi}^T = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi^+ \end{pmatrix} \quad , \quad (492)$$

und alles kann mit linkshändigen Feldern beschrieben werden:

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \Psi_L^C = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (493)$$

Aus der Gleichung (492) folgt, daß ein Majorana-Teilchen sein eigenes Anti-Teilchen ist:

$$\Psi_M = \Psi_M^C \quad . \quad (494)$$

Zum Abschluß soll noch eine Eigenschaft der Ladungskonjugationsmatrix gezeigt werden, die besonders wichtig ist, wenn man mit Majorana-Fermionen arbeitet [42]:

$$C^{-1} \Gamma_i C = +\Gamma_i^T \quad \text{für } \Gamma_i \in \{1, \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5\} \quad , \quad (495)$$

$$C^{-1} \Gamma_i C = -\Gamma_i^T \quad \text{für } \Gamma_i \in \{\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}\} \quad . \quad (496)$$

D Farb-Algebra

Die Generatoren \mathbf{T}_a der $SU(3)_C$ erfüllen die folgende Kommutationsrelation:

$$[\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b] = i f_{abc} \mathbf{T}_c \quad , \quad (497)$$

wobei f_{abc} die antisymmetrischen Strukturkonstanten der $SU(3)_C$ sind. Eine irreduzible 3-dimensionale Darstellung wurde von Gell-Mann eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{T}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \\ \mathbf{T}_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{T}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \\ \mathbf{T}_5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{T}_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \\ \mathbf{T}_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{T}_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (498)$$

Für die obigen Gell-Mann-Matrizen oder im allgemeinen für die Generatoren der $SU(3)$ gelten die folgenden Relationen:

$$\mathbf{T}_{ij}^a \mathbf{T}_{kl}^a = \frac{1}{2} \left[\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] , \quad (499)$$

$$\text{tr}(\mathbf{T}^a) = 0 . \quad (500)$$

Bei der Behandlung von Farbfaktoren sind einige Beziehungen für die Strukturkonstanten von Relevanz [58, 97]:

$$f_{acd} f_{bcd} = 3 \delta_{ab} , \quad (501)$$

$$f_{cba} f_{deb} f_{kae} = -\frac{3}{2} f_{cdk} , \quad (502)$$

$$f_{abe} f_{ecd} + f_{cbe} f_{aed} + f_{dbe} f_{ace} = 0 . \quad (503)$$

Weiterhin sollen noch einige nützliche Relationen angegeben werden, welche u. a. in [58] ausführlich vorgerechnet werden:

$$f_{bac} \mathbf{T}_c \mathbf{T}_b = \frac{i}{2} n_c \mathbf{T}_a , \quad (504)$$

$$\mathbf{T}_b \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b = \mathbf{T}_a \left(-\frac{1}{2} n_c + \mathbf{T}_b \mathbf{T}_b \right) , \quad (505)$$

wobei n_c die Anzahl der Farben ist. Die Gleichung (501) kann verallgemeinert werden zu $f_{acd} f_{bcd} = n_c \delta_{ab}$. Um die Arbeit möglichst lesbar zu halten, werden einige typische Farbfaktoren berechnet:

Beispiel 1:

$$\mathbf{T}_c \mathbf{T}_d f_{dba} f_{acb} = 3 \delta_{dc} \mathbf{T}_c \mathbf{T}_d = 4 ,$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_a \mathbf{T}_e f_{adc} f_{dek} f_{ckb} &= -\frac{3}{2} \mathbf{T}_a \mathbf{T}_e f_{aeb} \\ &= -i \frac{9}{4} \mathbf{T}_b , \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_a \mathbf{T}_c \mathbf{T}_d f_{ade} f_{ecb} &= \mathbf{T}_c \mathbf{T}_a \mathbf{T}_d f_{ade} f_{ecb} + i f_{ack} \mathbf{T}_k \mathbf{T}_d f_{ade} f_{ecb} \\ &= \mathbf{T}_c \frac{i 3}{2} \mathbf{T}_d (-f_{ebc}) + i \mathbf{T}_k \mathbf{T}_d (-f_{kca}) (-f_{dae}) f_{bec} \\ &= \frac{-i 3}{2} \frac{i 3}{2} \mathbf{T}_b + i \mathbf{T}_k \mathbf{T}_d \frac{3}{2} f_{kdb} = 0 . \end{aligned}$$

Im weiteren sollen noch einige Farbidentitäten gegeben werden, welche die Generatoren einer beliebigen Darstellung der $SU(3)_C$ mit der Standard-Darstellung in Beziehung setzen. Zur Herleitung dieser Resultate wurde [88] herangezogen. Dank dieser Gleichung war es möglich, die Ergebnisse in Kapitel 4.2 kompakt zu präsentieren, ohne die verwendeten Darstellungen genau zu spezifizieren. Es gilt [77]:

$$\mathbf{T}_{(\phi)ij}^a \mathbf{T}_{(\psi)kl}^a C_{jlm} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} - \kappa_\phi - \kappa_\psi \right) C_{ikm} \quad , \quad (506)$$

$$\mathbf{T}_{(\phi)ij}^a C_{jkl} \mathbf{T}_{lm}^a = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} + \kappa_\phi - \kappa_\psi \right) C_{ikm} \quad , \quad (507)$$

$$\mathbf{T}_{(\psi)kj}^a C_{ijl} \mathbf{T}_{lm}^a = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} + \kappa_\psi - \kappa_\phi \right) C_{ikm} \quad , \quad (508)$$

$$C_{ijn}^* \mathbf{T}_{(\phi)il}^a C_{ljm} = \frac{3}{8} \xi \left(\frac{4}{3} + \kappa_\phi - \kappa_\psi \right) \mathbf{T}_{nm}^a \quad , \quad (509)$$

$$C_{jin}^* \mathbf{T}_{(\psi)il}^a C_{jlm} = \frac{3}{8} \xi \left(\frac{4}{3} + \kappa_\psi - \kappa_\phi \right) \mathbf{T}_{nm}^a \quad , \quad (510)$$

$$C_{ijn}^* \left(\mathbf{T}_{(\phi)}^a \mathbf{T}_{(\phi)}^b \right)_{il} C_{ljm} = \frac{\xi}{8} \left[\kappa_\phi \delta_{ab} \delta_{nm} + \frac{3i}{2} \left(\frac{4}{3} + \kappa_\phi - \kappa_\psi \right) f_{abc} \mathbf{T}_{nm}^c + \frac{3}{5} \eta_\phi d_{abc} \mathbf{T}_{nm}^c \right] \quad , \quad (511)$$

$$C_{jin}^* \left(\mathbf{T}_{(\psi)}^a \mathbf{T}_{(\psi)}^b \right)_{il} C_{jlm} = \frac{\xi}{8} \left[\kappa_\psi \delta_{ab} \delta_{nm} + \frac{3i}{2} \left(\frac{4}{3} + \kappa_\psi - \kappa_\phi \right) f_{abc} \mathbf{T}_{nm}^c + \frac{3}{5} \eta_\psi d_{abc} \mathbf{T}_{nm}^c \right] \quad , \quad (512)$$

wobei

$$\eta_\phi = 3(\kappa_\phi - \kappa_\psi)^2 + \frac{3}{2}\kappa_\phi - \frac{7}{2}\kappa_\psi - \frac{2}{3} \quad , \quad (513)$$

$$\eta_\psi = 3(\kappa_\psi - \kappa_\phi)^2 + \frac{3}{2}\kappa_\psi - \frac{7}{2}\kappa_\phi - \frac{2}{3} \quad . \quad (514)$$

Bei der Ableitung dieser Identitäten muß von dem Eichinvarianzverhalten des konkreten Prozesses (318) gebrauch gemacht werden. Aus Gründen der Vollständigkeit sollen noch die folgenden Gleichungen gegeben werden:

$$\mathbf{T}^a \mathbf{T}^b = \frac{i}{2} f_{abc} \mathbf{T}^c + \frac{1}{2} d_{abc} \mathbf{T}^c + \frac{1}{6} \delta_{ab} \mathbf{1} \quad , \quad (515)$$

$$f_{abc} f_{abd} = 3\delta_{cd} \quad , \quad d_{abc} d_{abd} = \frac{5}{3} \delta_{cd} \quad , \quad d_{aab} = 0 \quad . \quad (516)$$

E Integrale

Im folgenden wird eine allgemeine Prozedur zur Lösung von Einschleifen- und Zweischleifen-Integralen mit verschwindenden äußeren Impulsen angegeben. In den hier betrachteten Fällen

könnte der Integrand für ein typisches 2-loop-Integral mit den Schleifenimpulsen q_1 und q_2 die folgende Form besitzen:

$$I = \frac{q_1^\alpha q_1^\beta q_2^\gamma q_2^\delta q_2^\epsilon q_2^\zeta}{((q_1 + q_2)^2 - m_1^2)^{a_1} ((q_1 + q_2)^2 - m_2^2)^{a_2} (q_1^2 - m_3^2)^{a_3} (q_1^2 - m_4^2)^{a_4} (q_2^2 - m_5^2)^{a_5}} . \quad (517)$$

Der Vorteil des hier präsentierten Verfahrens ist, daß es streng analytisch ist und sich leicht am Computer implementieren läßt. Es besteht im wesentlichen aus drei Schritten:

1. Reduktion der tensoriellen Integrale auf skalare Integrale,
2. Vereinfachung des Zählers und des Nenners im Integranden mittels Partialbruchzerlegung,
3. Lösen der verbleibenden Integrale mit Hilfe der dimensional Regularisierung [98].

Im weiteren werden die einzelnen Schritte detailliert beschrieben.

E.1 Reduktion der tensoriellen Integrale zu skalaren Integralen

Integrale mit einer ungeraden Anzahl von q_i^α im Zähler sind Null wegen der symmetrischen Integrationsgrenzen. Die einzigen index-behafteten Größen sind die Integrationsvariablen (Schleifenimpulse) und der metrische Tensor, deshalb gelten für die 1-loop-Integrale die folgenden offensichtlichen Relationen:

$$\int d^D q \frac{q^\alpha q^\beta}{A(q)} = \frac{1}{D} \int d^D q \frac{q^2}{A(q)} g^{\alpha\beta} , \quad (518)$$

$$\int d^D q \frac{q^\alpha q^\beta q^\gamma q^\delta}{A(q)} = \frac{1}{D^2 + 2D} \int d^D q \frac{q^4}{A(q)} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) , \quad (519)$$

$$\int d^D q \frac{q^{\alpha_1} q^{\alpha_2} \dots q^{\alpha_{2k}}}{A(q)} = \frac{\Gamma(2 - \varepsilon)}{2^k \Gamma(2 - \varepsilon + k)} \int d^D q \frac{q^{2k}}{A(q)} \mathbf{X} . \quad (520)$$

Das Symbol \mathbf{X} steht für die Summe aller Permutationen von metrischen Tensoren $g^{\alpha_j \alpha_k}$. Diese obigen Aussagen lassen sich ohne weiteres für 2-loop-Integrale verallgemeinern. Hierbei ist die erste Relation offensichtlich, die beiden folgenden werden im Anschluß vorgerechnet.

$$\int d^D q_1 d^D q_2 \frac{q_1^\alpha q_2^\beta}{A(q_1, q_2)} = \frac{1}{D} \int d^D q_1 d^D q_2 \frac{(q_1 \cdot q_2)}{A(q_1, q_2)} g^{\alpha\beta} , \quad (521)$$

$$\begin{aligned} \int d^D q_1 d^D q_2 \frac{q_1^\alpha q_1^\beta q_1^\gamma q_2^\delta}{A(q_1, q_2)} &= \frac{1}{D^2 + 2D} \int d^D q_1 d^D q_2 \frac{q_1^2 (q_1 \cdot q_2)}{A(q_1, q_2)} \\ &\times (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) , \end{aligned} \quad (522)$$

$$\begin{aligned}
\int d^D q_1 d^D q_2 \frac{q_1^\alpha q_1^\beta q_2^\gamma q_2^\delta}{A(q_1, q_2)} &= \frac{1}{D^3 + D^2 - 2D} \int d^D q_1 d^D q_2 \\
&\times \left[\left((1+D) \frac{q_1^2 q_2^2}{A(q_1, q_2)} - 2 \frac{(q_1 \cdot q_2)^2}{A(q_1, q_2)} \right) g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{q_1^2 q_2^2}{A(q_1, q_2)} + D \frac{(q_1 \cdot q_2)^2}{A(q_1, q_2)} \right) (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \right] .
\end{aligned} \tag{523}$$

A steht für eine beliebige Funktion, die im 1-loop Fall nur von q^2 und im 2-loop Fall von q_1^2 , q_2^2 und $(q_1 + q_2)^2$ und selbstverständlich von beliebigen Massen abhängen kann. Ein typischer Ausdruck für den hier relevanten Fall ist in Gleichung (517) zu finden.

Um die Gleichung (522) zu verifizieren, wird der folgende Ansatz gemacht:

$$\int d^D q_1 d^D q_2 \frac{q_1^\alpha q_1^\beta q_2^\gamma q_2^\delta}{A(q_1, q_2)} = F_1 (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) ,$$

der gerechtfertigt ist, da es keine Rolle spielt, mit welchem Index man δ kontrahiert. Indem eine beliebige Kombination der obigen metrischen Tensoren ausgewählt wird (z. B. $g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}$) und beide Seiten in der letzten Gleichung damit multipliziert und kontrahiert werden, erhält man:

$$\int d^D q_1 d^D q_2 \frac{q_1^2 (q_1 \cdot q_2)}{A(q_1, q_2)} = F_1 (D^2 + 2D) .$$

Auflösen nach F_1 und Einsetzen in den Ansatz ergibt das gewünschte Resultat.

Der Beweis von Gleichung (523) ist etwas komplizierter [71] und soll deshalb noch einmal ausführlich vorgeführt werden. Es wird der folgende Ansatz gemacht:

$$\int d^D q_1 d^D q_2 \frac{q_1^\alpha q_1^\beta q_2^\gamma q_2^\delta}{A(q_1, q_2)} = F_1 g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} + F_2 (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) .$$

Im weiteren multipliziert man beide Seiten mit $g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}$ und mit $g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}$ bzw. mit $g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}$ (die letzteren beiden Umformungen liefern dasselbe Resultat und sind somit identisch, daher ist kein F_3 zu finden). Dies führt auf die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
X_1 &= D^2 F_1 + 2D F_2 , \\
X_2 &= D F_1 + D(D+1) F_2 ,
\end{aligned}$$

wobei der Integrand von X_1 die Form $q_1^2 q_2^2 / A(q_1, q_2)$ besitzt und für den Integranden in X_2 ergibt sich $(q_1 \cdot q_2)^2 / A(q_1, q_2)$. Aus obigem Gleichungssystem folgt durch Inversion:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{D^3 + D^2 - 2D} \begin{pmatrix} 1+D & -2 \\ -1 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} .$$

Dieses Resultat liefert zusammen mit dem Ansatz das Ergebnis (522).

E.2 Vereinfachung des Zählers und Nenners

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung lassen sich die Integranden weiter vereinfachen:

$$\frac{1}{(q^2 - m_1^2)(q^2 - m_2^2)} = \frac{1}{m_1^2 - m_2^2} \left\{ \frac{1}{q^2 - m_1^2} - \frac{1}{q^2 - m_2^2} \right\} , \quad (524)$$

$$\frac{q^2}{(q^2 - m_1^2)(q^2 - m_2^2)} = \frac{1}{m_1^2 - m_2^2} \left\{ \frac{m_1^2}{q^2 - m_1^2} - \frac{m_2^2}{q^2 - m_2^2} \right\} . \quad (525)$$

Der Zähler wird mit Hilfe der folgenden Relationen unabhängig von den Schleifenimpulsen:

$$\frac{q^2}{(q^2 - m^2)^2} = \frac{1}{q^2 - m^2} + \frac{m^2}{(q^2 - m^2)^2} , \quad (526)$$

$$(q_1 \cdot q_2) = \frac{1}{2} \left\{ ((q_1 + q_2)^2 - m_1^2) - (q_1^2 - m_2^2) - (q_2^2 - m_3^2) + m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 \right\} . \quad (527)$$

Nach der Ausführung der oben erwähnten Schritte erhält man die beiden folgenden Integrale:

$$G_a^m = \mu^{2\varepsilon} \int d^D q \frac{1}{(q^2 - m^2)^a} , \quad (528)$$

$$G_{a_1, a_2, a_3}^{m_1, m_2, m_3} = \mu^{4\varepsilon} \int d^D q_1 d^D q_2 \frac{1}{((q_1 + q_2)^2 - m_1^2)^{a_1} (q_1^2 - m_2^2)^{a_2} (q_2^2 - m_3^2)^{a_3}} . \quad (529)$$

Das Integral in (528) läßt sich nun trivial lösen, das Integral in (529) kann man jedoch weiter vereinfachen. Es gilt die folgende Beziehung:

$$G_{a_1+1, a_2, a_3}^{m_1, m_2, m_3} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial}{\partial m_1^2} G_{a_1, a_2, a_3}^{m_1, m_2, m_3} , \quad (530)$$

mit deren Hilfe jedes Integral mit $m_i \neq 0$ auf folgendes Grundintegral reduziert werden kann:

$$G_{1,1,1}^{m_1, m_2, m_3} = \mu^{4\varepsilon} \int d^D q_1 d^D q_2 \frac{1}{((q_1 + q_2)^2 - m_1^2)(q_1^2 - m_2^2)(q_2^2 - m_3^2)} . \quad (531)$$

Eine andere, vor allem im Fall von drei nichtverschwindenden Massen, sehr effektive Methode zur Reduktion der Exponenten im Nenner der Integrale ist die Ausnutzung von Rekurrenz-Relationen. Da dies ein sehr elegantes Verfahren ist, wird diesem Thema ein separates Unterkapitel (siehe E.4) gewidmet.

E.3 Lösung der skalaren Integrale

Der letzte verbleibende Schritt ist die Lösung der Grundintegrale mit Hilfe der Feynman-Parametrisierung [22]. Dieses Verfahren macht Gebrauch von folgender Relation:

$$\frac{1}{\prod_i^n a_i^{\alpha_i}} = \frac{\Gamma(\sum_i^n \alpha_i)}{\prod_i^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \delta(1 - \sum_i^n x_i) \frac{\prod_i^n x_i^{\alpha_i-1}}{(\sum_i^n a_i x_i)^{\sum_i^n \alpha_i}} \quad , \quad (532)$$

wobei a_i für den Nenner eines allgemeinen Propagators steht, α_i sind beliebige ganzzahlige Exponenten. Man kann sich leicht überzeugen, daß für den Spezialfall $n = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ gilt:

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 dx_1 \frac{1}{(a_1 x_1 + a_2 (1 - x_1))^2} \quad .$$

Nachdem die Feynman-Parametrisierung durchgeführt ist, kann man mit Hilfe der folgenden Gleichung:

$$\frac{1}{(P(k) + i\varepsilon)^a} = \frac{(-i)^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty dZ Z^{(a-1)} \exp[i Z (P(k) + i\varepsilon)] \quad (533)$$

das $D = (4 - 2\varepsilon)$ -dimensionale Impuls-Integral in ein Gauß-Integral überführen. Für das Gaußsche Integral gilt in D Dimensionen die folgende Identität:

$$\mu^{2\varepsilon} \int_M d^D k \exp(i \alpha (k + c)^2) = i \pi^{D/2} e^{-i \pi D/4} \mu^{2\varepsilon} \frac{1}{\alpha^{D/2}} \quad . \quad (534)$$

Die obigen Schritte zusammengefaßt ergeben für das allgemeine Einschleifen-Integral aus Gleichung (528):

$$\int \frac{d^D q}{(q^2 - m^2)^a} = i (-1)^{D/2} \pi^{D/2} \frac{\Gamma(a - D/2)}{\Gamma(a)} \frac{1}{(-m^2)^{a-D/2}} \quad . \quad (535)$$

Aus dieser sehr allgemeinen Beziehung werden nun die folgenden drei für diese Arbeit wichtigen Ergebnisse abgeleitet:

$$G_1^m = i \pi^2 m^2 \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \ln \pi + 1 - \gamma_E \right] \quad , \quad (536)$$

$$G_2^m = i \pi^2 \left[\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \ln \pi - \gamma_E \right] \quad , \quad (537)$$

$$G_{a>2}^m = i \pi^2 \frac{\Gamma(a-2)}{\Gamma(a)} \frac{1}{(-m^2)^{a-2}} \quad . \quad (538)$$

Hierbei ist $\gamma_E = 0.577216 \dots$ die Euler-Mascheroni-Zahl.

Die 2-loop-Integrale lassen sich mit demselben Verfahren lösen. Es ist aus Gründen der Einfachheit sinnvoller, das Integral $G_{2,1,1}^{m_1, m_2, m_3}$ zu lösen und im Anschluß die Beziehung:

$$G_{1,1,1}^{m_1, m_2, m_3} = \frac{1}{3-D} \left[m_1^2 G_{2,1,1}^{m_1, m_2, m_3} + m_2^2 G_{1,2,1}^{m_1, m_2, m_3} + m_3^2 G_{1,1,2}^{m_1, m_2, m_3} \right] \quad (539)$$

zu benutzen. Entsprechend [98] ergibt sich für $G_{2,1,1}^{m_1, m_2, m_3}$:

$$\begin{aligned} G_{2,1,1}^{m_1, m_2, m_3} = & \pi^4 \left\{ \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon} \left[-1 + 2\gamma_E + 2 \ln \left(\pi \frac{m_1^2}{\mu^2} \right) \right] + \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{12} \right. \\ & \left. \frac{1}{4} \left[-1 + 2\gamma_E + 2 \ln \left(\pi \frac{m_1^2}{\mu^2} \right) \right]^2 + g(m_1, m_2, m_3) \right\} \end{aligned} \quad (540)$$

und

$$g(m_1, m_2, m_3) = \int_0^1 dy \left[\text{Li}_2(1 - \rho^2) - \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} \ln \rho^2 \right] . \quad (541)$$

Hierbei wurden die folgenden Abkürzungen gewählt:

$$\rho^2 = \frac{ay + b(1-y)}{y(1-y)} \quad , \quad a = \frac{m_2^2}{m_1^2} \quad , \quad b = \frac{m_3^2}{m_1^2} \quad .$$

Dieses Integral läßt sich analytisch lösen, es ist jedoch für den hier betrachteten Fall zu allgemein. Bei den für diese Arbeit relevanten Integralen ist immer eine Masse identisch Null, wodurch die Handhabbarkeit der Resultate wesentlich erleichtert wird. Im folgenden wird eine Liste aller relevanten Integrale angegeben:

$$\begin{aligned} G_{1,1,1}^{0, m_2, m_3} = & \mathcal{F} m_2^2 \left\{ -\frac{1+x}{2\varepsilon^2} + \frac{-3-3x+2x \ln x}{2\varepsilon} + \frac{-7-7x+6x \ln x}{2} \right. \\ & \left. + \frac{1-2x}{2} \ln^2 x + (1-x) \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\} \quad , \end{aligned} \quad (542)$$

$$\begin{aligned} G_{2,1,1}^{0, m_2, m_3} = & \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1-x+2x \ln x}{2\varepsilon(x-1)} + \frac{-1+x-2x \ln x}{2(x-1)} \right. \\ & \left. + \frac{1+2x}{2(x-1)} \ln^2 x + \frac{2+2x}{2(x-1)} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right\} \quad , \end{aligned} \quad (543)$$

$$G_{3,1,1}^{0, m_2, m_3} = \frac{\mathcal{F}}{m_2^2} \left\{ \frac{-1+x^2-2x \ln x}{2\varepsilon(x-1)^3} - \frac{1-x^2+(4x+2x^2) \ln x}{2(x-1)^3} \right\}$$

$$-\frac{3x}{2(x-1)^3} \ln^2 x - \frac{4x}{2(x-1)^3} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \Bigg\} \quad , \quad (544)$$

$$\begin{aligned} G_{4,1,1}^{0,m_2,m_3} = & \frac{\mathcal{F}}{m_2^4} \left\{ \frac{-1 - 9x + 9x^2 + x^3 - 6x(1+x) \ln x}{6\varepsilon(x-1)^5} \right. \\ & - \frac{3 + 11x - 11x^2 - 3x^3 + 2x(6 + 15x + x^2) \ln x}{6(x-1)^5} \\ & \left. - \frac{9x(1+x)}{6(x-1)^5} \ln^2 x - \frac{12x(1+x)}{6(x-1)^5} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right\} \quad , \quad (545) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{5,1,1}^{0,m_2,m_3} = & \frac{\mathcal{F}}{m_2^6} \left\{ \frac{-1 - 28x + 28x^3 + x^4 - 12x(1 - 3x - x^2) \ln x}{12\varepsilon(x-1)^7} \right. \\ & - \frac{2 + 27x - 27x^3 - 2x^4 + x(12 + 69x + 40x^2 + x^3) \ln x}{6(x-1)^7} \\ & + \frac{3x(1 + 3x + x^2)}{2(x-1)^7} \ln^2 x + \frac{2x(1 + 3x + x^2)}{(x-1)^7} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \Bigg\} \quad , \quad (546) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{6,1,1}^{0,m_2,m_3} = & \frac{\mathcal{F}}{m_2^8} \left\{ \frac{3 + 175x + 300x^2 - 300x^3 - 175x^4 - 3x^5}{60\varepsilon(x-1)^9} \right. \\ & + \frac{x(1 + 6x + 6x^2 + 6x^3)}{\varepsilon(x-1)^9} \ln x \\ & + \frac{7 + 208x + 329x^2 - 329x^3 - 208x^4 - 7x^5}{30(x-1)^9} \\ & + \frac{x(60 + 615x + 915x^2 + 235x^3 + 3x^4)}{30(x-1)^9} \ln x \\ & - \frac{3x(1+x)(1+5x+x^2)}{2(x-1)^9} \ln^2 x \\ & \left. - \frac{2x(1+x)(1+5x+x^2)}{(x-1)^9} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right\} \quad , \quad (547) \end{aligned}$$

$$G_{2,1,1}^{m_2,m_3,0} = \mathcal{F} \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} + \frac{\ln^2 x}{2} + \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right\} \quad (548)$$

mit $x = m_3^2/m_2^2$ und einem Vorfaktor: $\mathcal{F} = (\mu^2/m_2^2)^{(2\varepsilon)}\Gamma(1+\varepsilon)^2$.

Bei der Vereinfachung und Berechnung der Integrale wurde von einer wichtigen Eigenschaft der dimensional Regularisierung Gebrauch gemacht. Für alle masselosen Integrale gilt:

$$\mu^{2\varepsilon} \int d^D q \frac{1}{(q^2)^\alpha} = 0 \quad . \quad (549)$$

Abschließend sollen noch die Spezialfälle $m_1 = m_2$, $m_3 = 0$ und $m_2 = m_3 = 0$ angegeben werden. Um die Notation kompakt zu halten, wird das Pochhammer-Symbol $(a)_k$ definiert:

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1) & k \geq 1 \\ 1 & k = 0 \\ 1/[(a-1)(a-2)\dots(a-|k|)] & k \leq -1 \end{cases} . \quad (550)$$

Damit folgt:

$$G_{a_1, a_2, a_3}^{m_1, m_1, 0} = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)^2 \pi^D}{(m_1^2)^{(a_1+a_2+a_3-4)}} \left(\frac{\mu^2}{m_1^2} \right)^{2\varepsilon} (-1)^{a_1+a_2+a_3+1} \\ \times \frac{(2-\varepsilon)_{-n_3} (1+\varepsilon)_{a_1+a_2-3} (1+\varepsilon)_{a_2+a_3-3}}{(a_1-1)!(a_2-1)!(a_1+a_2+a_3-D)_{a_3}} , \quad (551)$$

$$G_{a_1, a_2, a_3}^{m_1, 0, 0} = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)^2 \pi^D}{(m_1^2)^{(a_1+a_2+a_3-4)}} \left(\frac{\mu^2}{m_1^2} \right)^{2\varepsilon} (-1)^{a_1+a_2+a_3+1} \\ \times \frac{(1+2\varepsilon)_{a_1+a_2+a_3-5} (1+\varepsilon)_{a_2+a_3-3} (1-\varepsilon)_{1-a_2} (1-\varepsilon)_{1-a_3}}{(a_1-1)!(a_2-1)!(a_3-1)!(1-\varepsilon)(1-\frac{1}{3}\pi^2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3))} . \quad (552)$$

E.4 Rekurrens-Relationen

Zur Ableitung der Rekurrens-Relationen benutzt man die folgenden Identitäten [99, 100]:

$$\int d^D q_1 d^D q_2 \frac{\partial}{\partial q_1^\mu} \left(\frac{q_1^\mu}{(q_1^2 - m_1^2)^{a_1} (q_2^2 - m_2^2)^{a_2} ((q_1 + q_2)^2 - m_3^2)^{a_3}} \right) = 0 , \quad (553)$$

$$\int d^D q_1 d^D q_2 \frac{\partial}{\partial q_2^\mu} \left(\frac{q_2^\mu}{(q_1^2 - m_1^2)^{a_1} (q_2^2 - m_2^2)^{a_2} ((q_1 + q_2)^2 - m_3^2)^{a_3}} \right) = 0 , \quad (554)$$

$$\int d^D q_1 d^D q_2 \frac{\partial}{\partial q_1^\mu} \left(\frac{q_1^\mu}{(q_1^2 - m_1^2)^{a_1} ((q_1 + q_2)^2 - m_2^2)^{a_2} (q_2^2 - m_3^2)^{a_3}} \right) = 0 , \quad (555)$$

welche durch eine Umsubstitution der Integrationsvariablen ineinander überführt werden können. Die Vierer-Divergenz im Integral kann mittels dem Gaußschen Integralsatz in ein Oberflächen-Integral überführt werden, welches symmetrische Grenzen und einen asymmetrischen Integranden enthält. Die Auswertung der ersten Beziehung liefert:

$$(D - 2a_1 - a_3) G_{a_1, a_2, a_3} = 2a_1 m_1^2 G_{a_1+1, a_2, a_3} + a_3 (G_{a_1-1, a_2, a_3+1} - G_{a_1, a_2-1, a_3+1}) \\ + a_3 (m_1^2 - m_2^2 + m_3^2) G_{a_1, a_2, a_3+1} , \quad (556)$$

wobei immer gelten soll $G_{a_1, a_2, a_3}^{m_1, m_2, m_3} = G_{a_1, a_2, a_3}$. Die zweite Identität folgt aus der ersten durch die Substitution: $a_1 \leftrightarrow a_2$ und $m_1 \leftrightarrow m_2$. Für die Gleichung (555) ergibt sich:

$$(D - 2a_1 - a_2) G_{a_1, a_2, a_3} = 2a_1 m_1^2 G_{a_1+1, a_2, a_3} + a_2 (G_{a_1-1, a_2+1, a_3} - G_{a_1, a_2+1, a_3-1}) + a_2 (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2) G_{a_1, a_2+1, a_3} \quad . \quad (557)$$

Diese 3 Gleichungen verknüpfen Integrale mit einer Exponentensumme $a_1 + a_2 + a_3 + 1$ mit Integralen, bei denen die Exponentensumme um 1 reduziert ist. Sie stellen 3 linear unabhängige Relationen dar, die benutzt werden können, um nach den Integralen G_{a_1+1, a_2, a_3} , G_{a_1, a_2+1, a_3} und G_{a_1, a_2, a_3+1} aufzulösen. Man erhält die folgende Rekurrens-Relation [100]:

$$G_{a_1+1, a_2, a_3} = \frac{1}{a_1 m_1^2 \Delta(m_1, m_2, m_3)} \times \left\{ \left[a_2 (m_1^2 - m_3^2)(m_1^2 - m_2^2 + m_3^2) + a_3 (m_1^2 - m_2^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2) + D m_1^2 (-m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) - a_1 \Delta(m_1, m_2, m_3) \right] G_{a_1, a_2, a_3} + a_2 m_2^2 (m_1^2 - m_2^2 + m_3^2) [G_{a_1, a_2+1, a_3-1} - G_{a_1-1, a_2+1, a_3}] + a_3 m_3^2 (m_1^2 + m_2^2 - m_3^2) [G_{a_1, a_2-1, a_3+1} - G_{a_1-1, a_2, a_3+1}] \right\} \quad , \quad (558)$$

mit der Determinante $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ des zugehörigen Gleichungssystems:

$$\Delta(m_1, m_2, m_3) = 2(m_1^2 m_2^2 + m_1^2 m_3^2 + m_2^2 m_3^2) - (m_1^4 + m_2^4 + m_3^4) \quad . \quad (559)$$

Die Rekurrens-Relationen für G_{a_1, a_2+1, a_3} und G_{a_1, a_2, a_3+1} ergeben sich durch einfache Permutation der Indizes. Für diese Arbeit ist vor allem der Fall relevant, daß eine Masse (o. B. d. A. m_3) identisch Null ist. Damit kann durch einen Grenzübergang $m_3 \rightarrow 0$ sofort die Beziehungen für G_{a_1+1, a_2, a_3} und G_{a_1, a_2+1, a_3} abgeleitet werden:

$$m_1^2 G_{a_1+1, a_2, a_3} = \frac{1}{a_1 (1-x)} \{ [D - a_1 - a_2 - a_3 + x(a_1 - a_3)] G_{a_1, a_2, a_3} + x a_2 [G_{a_1-1, a_2+1, a_3} - G_{a_1, a_2+1, a_3-1}] \} \quad , \quad (560)$$

$$m_2^2 G_{a_1, a_2+1, a_3} = -\frac{1}{a_2 x (1-x)} \{ [x(D - a_1 - a_2 - a_3) + a_2 - a_3] G_{a_1, a_2, a_3} + a_1 [G_{a_1+1, a_2-1, a_3} - G_{a_1+1, a_2, a_3-1}] \} \quad . \quad (561)$$

Es wurde hier bereits sinnvollerweise das Massenverhältnis $x = m_2^2/m_1^2$ eingeführt.

Der Grenzübergang $m_3 \rightarrow 0$ existiert nicht für G_{a_1, a_2, a_3+1} , wie man sich leicht überzeugt. Diese Rekurrens-Relation muß direkt bestimmt werden, was hier getan werden soll. Dieser Weg ist selbstverständlich auch für die beiden soeben angegebenen Gleichungen anwendbar.

Der erste Schritt ist die Eliminierung von G_{a_1+1, a_2, a_3} in Gleichung (556):

$$\begin{aligned}
(D - 2a_1 - a_3) G_{a_1, a_2, a_3} &= a_3(m_1^2 - m_2^2) G_{a_1, a_2, a_3+1} + a_3 (G_{a_1-1, a_2, a_3+1} - G_{a_1, a_2-1, a_3+1}) \\
&+ (D - 2a_1 - a_2) G_{a_1, a_2, a_3} - a_2 (G_{a_1-1, a_2+1, a_3} - G_{a_1, a_2+1, a_3-1}) \\
&- a_2(m_1^2 + m_2^2) G_{a_1, a_2+1, a_3} \quad . \quad (562)
\end{aligned}$$

Nun muß G_{a_1, a_2+1, a_3} ersetzt werden, was nach Umsortieren den folgenden Ausdruck ergibt:

$$\begin{aligned}
(a_2 - a_3) G_{a_1, a_2, a_3} &= a_3(m_1^2 - m_2^2) G_{a_1, a_2, a_3+1} + a_3 (G_{a_1-1, a_2, a_3+1} - G_{a_1, a_2-1, a_3+1}) \\
&- a_2 (G_{a_1-1, a_2+1, a_3} - G_{a_1, a_2+1, a_3-1}) \\
&- \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_2^2} [(D - 2a_2 - a_3) G_{a_1, a_2, a_3} \\
&+ a_3 (G_{a_1-1, a_2, a_3+1} - G_{a_1, a_2-1, a_3+1}) + a_3 (m_1^2 - m_2^2) G_{a_1, a_2, a_3+1}] \quad . \quad (563)
\end{aligned}$$

Damit besitzt die dritte Rekurrens-Relation die folgende Form:

$$\begin{aligned}
m_1^2 G_{a_1, a_2, a_3+1} &= \frac{1}{a_3(1-x)^2} \{ [(x+1)(-D + 2a_2 + a_3) - 2xa_2 + 2xa_3] G_{a_1, a_2, a_3} \\
&+ 2xa_2 [G_{a_1, a_2+1, a_3-1} - G_{a_1-1, a_2+1, a_3}] \\
&+ a_3(1-x) [G_{a_1, a_2-1, a_3+1} - G_{a_1-1, a_2, a_3+1}] \} \quad . \quad (564)
\end{aligned}$$

F Das $B\bar{B}$ -Mixing

F.1 Feynman-Diagramme zum $B\bar{B}$ -Mixing

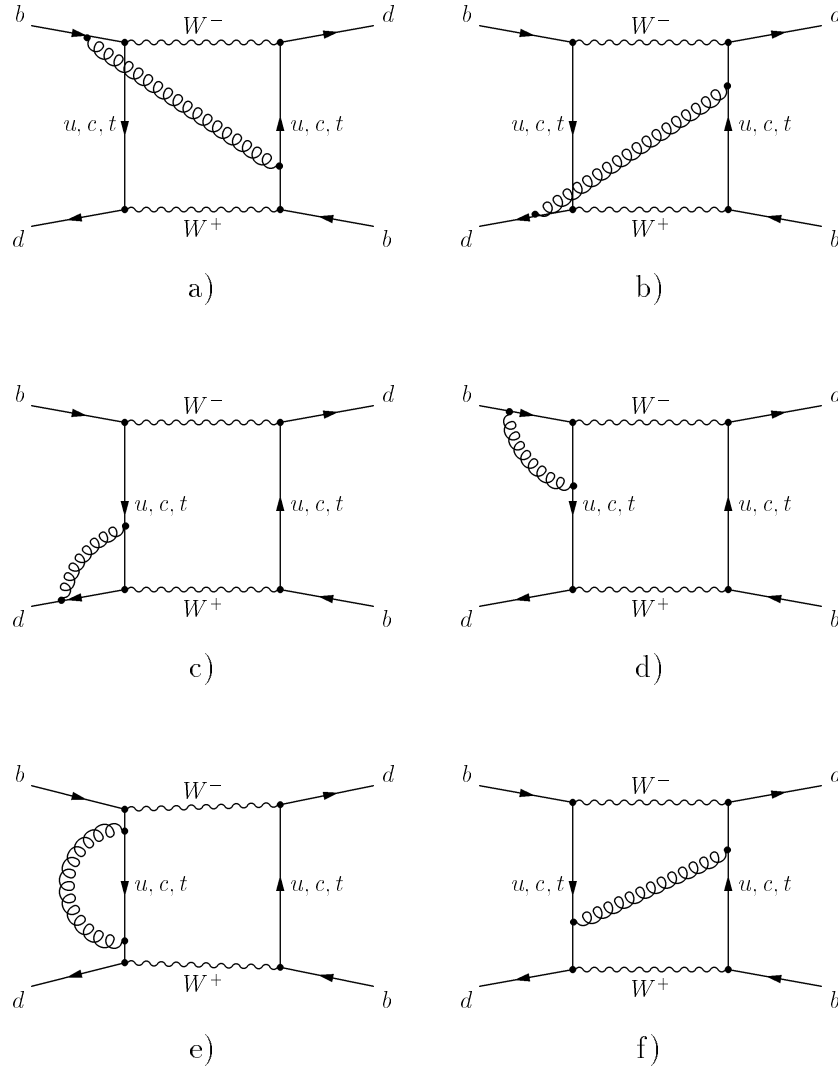


Abbildung 20: Diagramme für die NLO-Rechnungen im SM, welche im Limes verschwindender Massen der externen Quarks konvergent sind. Zusätzliche Diagramme mit einem Higgs-Boson und zwei Higgs-Bosonen müssen im 2HDM berechnet werden, sowie Diagramme, die durch eine Fierz-Transformation aus obigen hervorgehen.

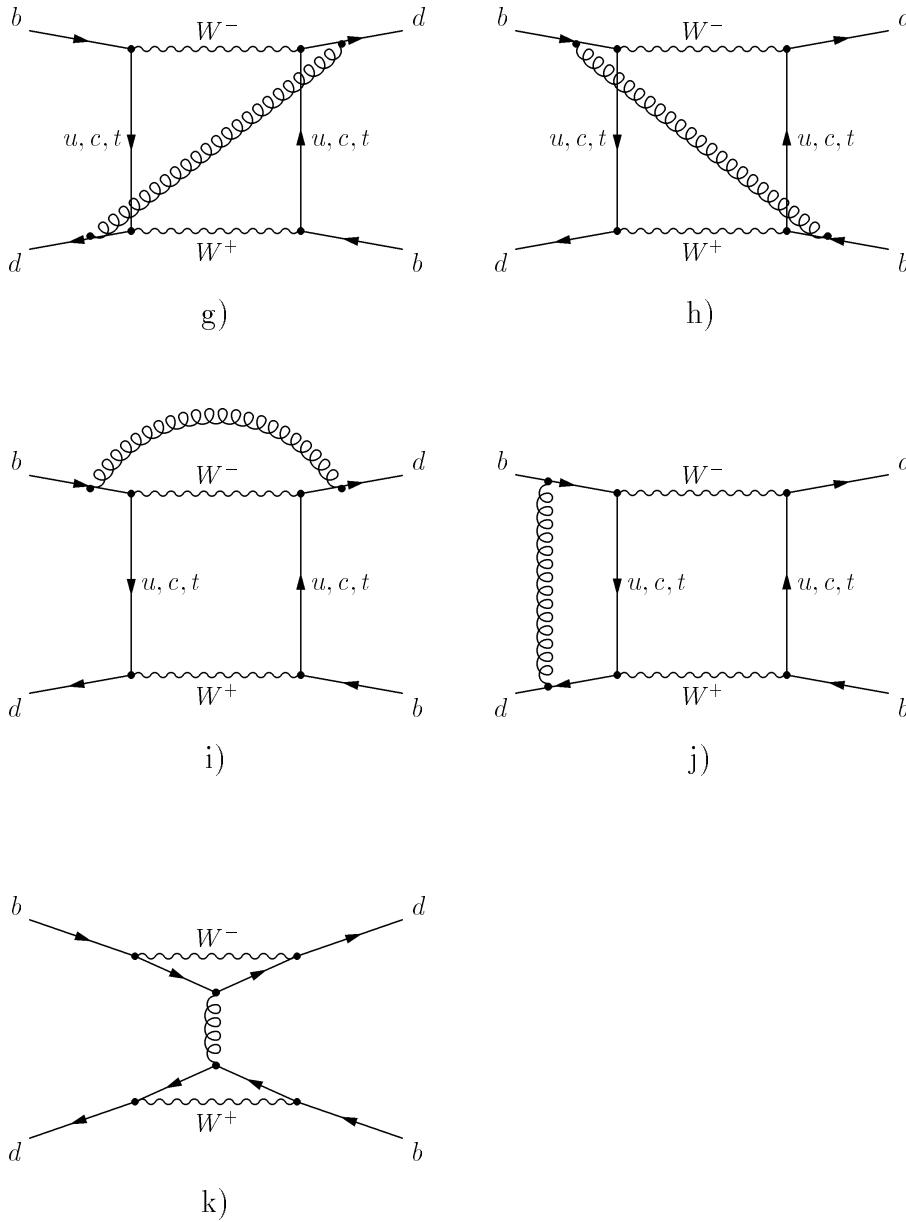


Abbildung 21: Diagramme für die NLO-Rechnung im SM, bei welchen IR-Divergenzen auftreten, wenn man die externen Quarks masselos annimmt. Das letzte Diagramm ist der sogenannte Doppel-Pinguin, welcher bei verschwindenden externen Impulsen nicht zu der gewünschten Ordnung beiträgt. Zusätzliche Diagramme im 2HDM und „crossed“ Diagramme müssen ebenfalls berechnet werden.

F.2 Analytische NLO-Resultate für das $B\bar{B}$ -Mixing

Die Funktionen $L^{(i,SM)}$ können zerlegt werden:

$$L^{(i,SM)}(x_W) = WW^{(i)}(x_W) + 2 W\Phi^{(i)}(x_W) + \Phi\Phi^{(i)}(x_W) \quad (565)$$

wobei

$$WW^{(1)}(x_W) = WW_{tt}^{(1)}(x_W) - 2 WW_{tu}^{(1)}(x_W) + WW_{uu}^{(1)}(x_W) , \quad (566)$$

$$\begin{aligned} WW_{tt}^{(1)}(x_W) = & \frac{(4x_W + 38x_W^2 + 6x_W^3) \ln(x_W)}{(x_W - 1)^4} + \frac{(12x_W + 48x_W^2 + 12x_W^3) \text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_W - 1)^4} \\ & + \frac{(24x_W + 48x_W^2) \text{Li}_2(1 - x_W)}{(x_W - 1)^4} - \frac{3 + 28x_W + 17x_W^2}{(x_W - 1)^3} , \end{aligned} \quad (567)$$

$$\begin{aligned} 2 WW_{tu}^{(1)}(x_W) = & \frac{2(3 + 13x_W)}{(x_W - 1)^2} - \frac{2x_W(5 + 11x_W) \ln(x_W)}{(x_W - 1)^3} \\ & - \frac{12x_W(1 + 3x_W) \text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_W - 1)^3} - \frac{24x_W(1 + x_W) \text{Li}_2(1 - x_W)}{(x_W - 1)^3} , \end{aligned} \quad (568)$$

$$WW_{uu}^{(1)}(x_W) = 3 , \quad (569)$$

$$\begin{aligned} \Phi\Phi^{(1)}(x_W) = & -\frac{x_W^2(7 + 52x_W - 11x_W^2)}{4(x_W - 1)^3} + \frac{3x_W^3(4 + 5x_W - x_W^2) \ln(x_W)}{2(x_W - 1)^4} \\ & + \frac{3x_W^3(3 + 4x_W - x_W^2) \text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_W - 1)^4} + \frac{18x_W^3 \text{Li}_2(1 - x_W)}{(x_W - 1)^4} , \end{aligned} \quad (570)$$

$$\begin{aligned} 2 W\Phi^{(1)}(x_W) = & \frac{4x_W^2(11 + 13x_W)}{(x_W - 1)^3} + \frac{2x_W^2(5 + x_W)(1 - 9x_W) \ln(x_W)}{(x_W - 1)^4} \\ & - \frac{24x_W^2(1 + 4x_W + x_W^2) \text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_W - 1)^4} - \frac{48x_W^2(1 + 2x_W) \text{Li}_2(1 - x_W)}{(x_W - 1)^4} , \end{aligned} \quad (571)$$

$$WW^{(8)}(x_W) = WW_{tt}^{(8)}(x_W) - 2 WW_{tu}^{(8)}(x_W) + WW_{uu}^{(8)}(x_W) , \quad (572)$$

$$\begin{aligned}
WW_{tt}^{(8)}(x_W) &= \frac{2x_W(4 - 3x_W)\ln(x_W)}{(x_W - 1)^3} - \frac{(12x_W - 12x_W^2 - 8x_W^3)\text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_W - 1)^4} \\
&+ \frac{(8 - 12x_W + 12x_W^2)\text{Li}_2(1 - x_W)}{(x_W - 1)^4} - \frac{(23 - x_W)}{(x_W - 1)^2}, \quad (573)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2WW_{tu}^{(8)}(x_W) &= \frac{4(-2 + x_W)\pi^2}{3x_W} - \frac{2(8 - 5x_W)\ln(x_W)}{(x_W - 1)^2} \\
&- \frac{4(3x_W + 2x_W^2)\text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_W - 1)^2} + \frac{4(4 - 6x_W + 3x_W^2)\text{Li}_2(1 - x_W)}{x_W(x_W - 1)^2} \\
&+ \frac{30}{(x_W - 1)}, \quad (574)
\end{aligned}$$

$$WW_{uu}^{(8)}(x_W) = -23 + \frac{4}{3}\pi^2, \quad (575)$$

$$\begin{aligned}
\Phi\Phi^{(8)}(x_W) &= -\frac{11x_W^2(1 + x_W)}{4(x_W - 1)^2} + \frac{x_W^3(4 - 3x_W)\ln(x_W)}{2(x_W - 1)^3} \\
&+ \frac{x_W^3(3 - 3x_W + 2x_W^2)\text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_W - 1)^4} + \frac{x_W^2(2 + 3x_W - 3x_W^2)\text{Li}_2(1 - x_W)}{(x_W - 1)^4}, \quad (576)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2W\Phi^{(8)}(x_W) &= \frac{30x_W^2}{(x_W - 1)^2} + \frac{12x_W^3\ln(x_W)}{(x_W - 1)^3} - \frac{12x_W^4\text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_W - 1)^4} \\
&- \frac{12x_W^2(2 - x_W^2)\text{Li}_2(1 - x_W)}{(x_W - 1)^4}. \quad (577)
\end{aligned}$$

Die Funktionen $L^{(i,H)}$ können in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$L^{(i,H)}(x_W, x_H) = \frac{2}{\tan^2(\beta)} WH^{(i)}(x_W, x_H) + \frac{2}{\tan^2(\beta)} \Phi H^{(i)}(x_W, x_H) + \frac{1}{\tan^4(\beta)} HH^{(i)}(x_H), \quad (578)$$

wobei

$$HH^{(1)}(x_i) = \frac{x_W}{x_H} \Phi \Phi^{(1)}(x_H) + 6 (\ln(x_H) - \ln(x_W)) \sum_{i=H,W} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} S_{HH}(x_i) , \quad (579)$$

$$\begin{aligned} 2 WH^{(1)}(x_i) = & x_W \left(\frac{2 x_H^2 (13 + 3 x_H) \ln(x_H)}{(x_H - 1)^3 (x_H - x_W)} - \frac{2 x_H (9 + 7 x_H + 7 x_W - 23 x_W x_H)}{(x_W - 1)^2 (x_H - 1)^2} \right. \\ & - \frac{2 x_H^2 (18 - 6 x_H - 44 x_W + 13 x_H x_W + 9 x_H x_W^2) \ln(x_W)}{(x_H - 1)^2 (x_W - 1)^3 (x_H - x_W)} \\ & + \frac{2 x_H x_W (5 - 27 x_W + 6 x_W^2 + 6 x_H x_W^2) \ln(x_W)}{(x_H - 1)^2 (x_W - 1)^3 (x_H - x_W)} - \frac{24 x_H^2 \ln(x_H) \ln(x_W)}{(x_H - 1)^3 (x_H - x_W)} \\ & + \frac{24 x_H^2 \text{Li}_2(1 - 1/x_H)}{(x_H - 1)^2 (x_H - x_W)} - \frac{24 x_H x_W (1 + x_W) \text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_W - 1)^3 (x_H - x_W)} \\ & \left. - \frac{48 x_W x_H \text{Li}_2(1 - x_W)}{(x_W - 1)^3 (x_H - x_W)} \right) , \quad (580) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \Phi H^{(1)}(x_i) = & x_W^2 \left(\frac{x_H (31 - 15 x_H - 15 x_W - x_H x_W)}{2 (x_H - 1)^2 (x_W - 1)^2} - \frac{x_H (7 + 21 x_H - 12 x_H^2) \ln(x_H)}{2 (x_H - 1)^3 (x_H - x_W)} \right. \\ & + \frac{x_H (7 - 9 x_W + 36 x_W^2 - 18 x_W^3) \ln(x_W)}{2 (x_H - 1)^2 (x_H - x_W) (x_W - 1)^3} \\ & + \frac{x_H^2 (8 - 36 x_W + 9 x_W^2 + 3 x_W^3) \ln(x_W)}{(x_H - 1)^2 (x_H - x_W) (x_W - 1)^3} \\ & - \frac{x_H^3 (11 - 45 x_W + 18 x_W^2) \ln(x_W)}{2 (x_H - 1)^2 (x_H - x_W) (x_W - 1)^3} + \frac{6 x_H \ln(x_H) \ln(x_W)}{(x_H - 1)^3 (x_H - x_W)} \\ & - \frac{6 x_H (1 + x_H - x_H^2) \text{Li}_2(1 - 1/x_H)}{(x_H - 1)^2 (x_H - x_W)} \\ & \left. + \frac{6 x_H (1 + 2 x_W^2 - x_W^3) \text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_H - x_W) (x_W - 1)^3} + \frac{12 x_H \text{Li}_2(1 - x_W)}{(x_H - x_W) (x_W - 1)^3} \right) , \quad (581) \end{aligned}$$

$$HH^{(8)}(x_i) = \frac{x_W}{x_H} \Phi \Phi^{(8)}(x_H) + 6 (\ln(x_H) - \ln(x_W)) S_{HH}(x_i) , \quad (582)$$

$$\begin{aligned} 2 WH^{(8)}(x_i) = & x_W \left(\frac{24 x_H x_W \text{Li}_2(1 - x_W)}{(x_H - x_W) (x_W - 1)^2} \right. \\ & \left. + \frac{6 x_H^2 (5 x_W - x_H + 3 x_W^2 x_H) \text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_H - 1)^2 (x_H - x_W) (x_W - 1)^2 x_W} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6x_H(2x_W^2 - 10x_Hx_W + x_Hx_W^2)\text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)(x_W - 1)^2} \\
& + \frac{6x_H^2(5x_W - x_H - 8x_W^2 + 2x_Hx_W^2)\text{Li}_2(1 - x_H)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)(x_W - 1)^2x_W} \\
& + \frac{6(x_W^2 - x_Hx_W + 2x_H^2x_W^2)\text{Li}_2(1 - x_H)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)(x_W - 1)^2} \\
& + \frac{6x_H^2(-x_H + 5x_W)\text{Li}_2(1 - 1/x_H)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)x_W} \\
& - \frac{6x_H^2(5x_W - x_H - 8x_W^2 + 2x_Hx_W^2)\text{Li}_2(1 - x_H/x_W)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)(x_W - 1)^2x_W} \\
& - \frac{6(x_W^2 - x_Hx_W + 2x_H^2x_W^2)\text{Li}_2(1 - x_H/x_W)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)(x_W - 1)^2} \\
& - \frac{6x_H(1 - x_H - \ln(x_H))}{(x_H - 1)^2(x_W - 1)} + \frac{6x_H(2x_W - 1)\ln(x_W)}{(x_H - 1)(x_W - 1)^2} \\
& + \frac{6x_H^2(5x_W - x_H - 8x_W^2)\ln(x_H)\ln(x_W)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)(x_W - 1)^2x_W} \\
& + \frac{12x_H^2(x_Hx_W + x_W^2)\ln(x_H)\ln(x_W)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)(x_W - 1)^2} \Bigg) , \tag{583}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \Phi H^{(8)}(x_i) = & x_W^2 \left(\frac{2x_H + 2x_W - 11x_Hx_W}{2(x_H - 1)(x_W - 1)x_W} \right. \\
& - \frac{(2x_H^2 - 7x_Hx_W + 2x_H^2x_W + 2x_W^2 + x_Hx_W^2)\ln(x_H)}{2(x_H - 1)^2(x_H - x_W)(x_W - 1)x_W} \\
& - \frac{x_H(7 - 7x_H + 4x_W - 6x_W^2)\ln(x_W)}{2(x_H - 1)(x_H - x_W)(x_W - 1)^2} \\
& + \frac{(x_H^2 + x_W^2 - 3x_H^2x_W^2)\ln(x_W)}{(x_H - 1)(x_H - x_W)(x_W - 1)^2x_W} \\
& - \frac{x_H^2(4 - 6x_W + 3x_Hx_W)\ln(x_H)\ln(x_W)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)(x_W - 1)^2x_W} \\
& + \frac{x_H(x_H^2 - 3x_W^2 + 6x_W^3 - 3x_W^4)\ln(x_H)\ln(x_W)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)(x_W - 1)^2x_W^2} \\
& - \frac{x_H(3x_W^2 + 2x_Hx_W(2 + x_W) - x_H^2(1 + 2x_W))\text{Li}_2(1 - 1/x_H)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)x_W^2} \\
& - \frac{(4x_Hx_W - 6x_H^2x_W + 3x_H^2x_W^2 - x_W^2)\text{Li}_2(1 - x_H)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)(x_W - 1)^2x_H} \\
& - \frac{(4x_H^2x_W - 6x_H^2x_W^2 - x_H^3 + 3x_H^3x_W^2)\text{Li}_2(1 - x_H)}{(x_H - 1)^2(x_H - x_W)(x_W - 1)^2x_W^2} \Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2 x_H^2 (6 - x_W^2 - 3 x_H + x_W x_H) \text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_H - 1)^2 (x_H - x_W) (x_W - 1)^2} \\
& - \frac{x_H (3 x_W^2 + 4 x_H x_W - x_H^2) \text{Li}_2(1 - 1/x_W)}{(x_H - 1)^2 (x_H - x_W) (x_W - 1)^2 x_W^2} \\
& + \frac{(4 x_H x_W - 6 x_H^2 x_W + 3 x_H^2 x_W^2 - x_W^2) \text{Li}_2(1 - x_H/x_W)}{(x_H - 1)^2 (x_H - x_W) (x_W - 1)^2 x_H} \\
& + \frac{x_H^2 (4 x_W - 6 x_W^2 - x_H + 3 x_H x_W^2) \text{Li}_2(1 - x_H/x_W)}{(x_H - 1)^2 (x_H - x_W) (x_W - 1)^2 x_W^2} \\
& - \frac{6 x_H \text{Li}_2(1 - x_W)}{(x_H - x_W) (x_W - 1)^2} \Bigg) . \tag{584}
\end{aligned}$$

Die Buchstaben W , Φ und H stehen für das W -Boson, das would-be-Goldstone-Boson und das physikalische Higgs-Teilchen. Die Kombination $W\Phi$ bezeichnet somit ein Diagramm mit einem internen W -Boson und einem internen would-be-Goldstone Boson (unphysikalisches, skalares Teilchen).

G Der seltene Zerfall $B \rightarrow X_S \gamma$

G.1 Die Operatorbasis

Es wird zwischen 3 Arten von Operatoren unterschieden: den physikalischen, den bewegungsgleichungsverschwindenden und den evaneszenten Operatoren. Die Operatorbasis ist dahingehend optimiert, daß so viel wie möglich Operatoren bei Anwendung der Bewegungsgleichung verschwinden. Die physikalischen Operatoren sind :

$$\hat{P}_1^u = (\bar{s} \gamma_\mu P_L \mathbf{T}^a u) (\bar{u} \gamma^\mu P_L \mathbf{T}^a b) \quad , \quad (585)$$

$$\hat{P}_1^c = (\bar{s} \gamma_\mu P_L \mathbf{T}^a c) (\bar{c} \gamma^\mu P_L \mathbf{T}^a b) \quad , \quad (586)$$

$$\hat{P}_2^u = (\bar{s} \gamma_\mu P_L u) (\bar{u} \gamma^\mu P_L b) \quad , \quad (587)$$

$$\hat{P}_2^c = (\bar{s} \gamma_\mu P_L c) (\bar{c} \gamma^\mu P_L b) \quad , \quad (588)$$

$$\hat{P}_4 = (\bar{s} \gamma_\mu P_L \mathbf{T}^a b) \sum_q (\bar{q} \gamma^\mu \mathbf{T}^a q) \quad , \quad (589)$$

$$\hat{P}_7 = \frac{e}{16 \pi^2} m_b (\bar{s} \sigma_{\mu\nu} P_R b) F^{\mu\nu} \quad , \quad (590)$$

$$\hat{P}_8 = \frac{g_3}{16 \pi^2} m_b (\bar{s} \sigma_{\mu\nu} P_R \mathbf{T}^a b) G^{a,\mu\nu} \quad . \quad (591)$$

Die bewegungsgleichungsverschwindenden Operatoren haben das folgenden Aussehen:

$$\hat{P}_{30} = \frac{i}{g_3^2} M_W^2 (\bar{s} \not{D} P_L b) \quad , \quad (592)$$

$$\hat{P}_{31} = \frac{1}{g_3} (\bar{s} P_R \gamma_\mu \mathbf{T}^a b) D_\nu G^{a,\mu\nu} + \hat{P}_4 \quad , \quad (593)$$

$$\hat{P}_{32} = \frac{m_b}{g_3^2} (\bar{s} P_R \not{D} \not{D} b) + \mathcal{O}(m_b^2) \quad , \quad (594)$$

$$\hat{P}_{33} = \frac{i}{g_3^2} (\bar{s} P_R \not{D} \not{D} \not{D} b) \quad , \quad (595)$$

$$\hat{P}_{34} = \frac{i}{g_3} \bar{s} P_R \left[\overleftarrow{\not{D}} \sigma_{\mu\nu} \mathbf{T}^a - \mathbf{T}^a \sigma_{\mu\nu} (\not{D} + i m_b) \right] b G^{a,\mu\nu} \quad , \quad (596)$$

$$\hat{P}_{35} = \frac{ie}{g_3^2} \bar{s} P_R \left[\overleftarrow{D} \sigma_{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu} (\not{D} + im_b) \right] b F^{\mu\nu} \quad , \quad (597)$$

$$\hat{P}_{36} = \frac{e}{g_3^2} (\bar{s} P_R \gamma_\mu b) \partial_\nu F^{\mu\nu} - \hat{P}_9 \quad . \quad (598)$$

Die kovariante Ableitung innerhalb der Operatoren \hat{P}_{34} und \hat{P}_{35} wirkt nur auf die Spinoren und nicht auf den Feldstärketensor $G_{\mu\nu}^a$ bzw. $F_{\mu\nu}$. Die Ladung des Feldes q wird durch Q_q symbolisiert. Die für diese Arbeit ebenfalls wichtigen evaneszenten Operatoren lauten :

$$\hat{P}_{11}^u = (\bar{s} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho P_L \mathbf{T}^a u) (\bar{u} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho P_L \mathbf{T}^a b) - 16 \hat{P}_1^u \quad , \quad (599)$$

$$\hat{P}_{11}^c = (\bar{s} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho P_L \mathbf{T}^a c) (\bar{c} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho P_L \mathbf{T}^a b) - 16 \hat{P}_1^c \quad . \quad (600)$$

Die Summe über q beinhaltet nur die leichten Quarkfelder, d. h. $q = \{u, d, s, c, b\}$.

G.2 Feynman-Diagramme für die Zerfälle $b \rightarrow s \gamma$, $b \rightarrow s g$

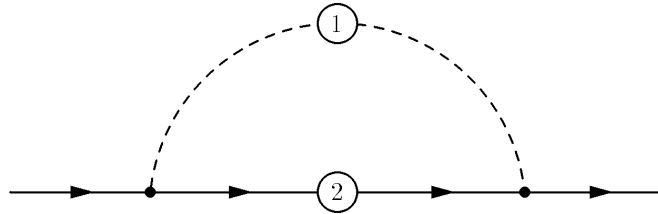


Abbildung 22: Im Bild sind die 1loop-Diagramme für die Zerfälle $b \rightarrow s \gamma$ und $b \rightarrow s g$ in einem generischen Modell dargestellt. Die durchgezogene Linie repräsentiert ein Fermion, die gestrichelte Linie ist ein Boson. Die kleinen Kreise stellen die Ankopplung eines Gluons oder Photons dar.

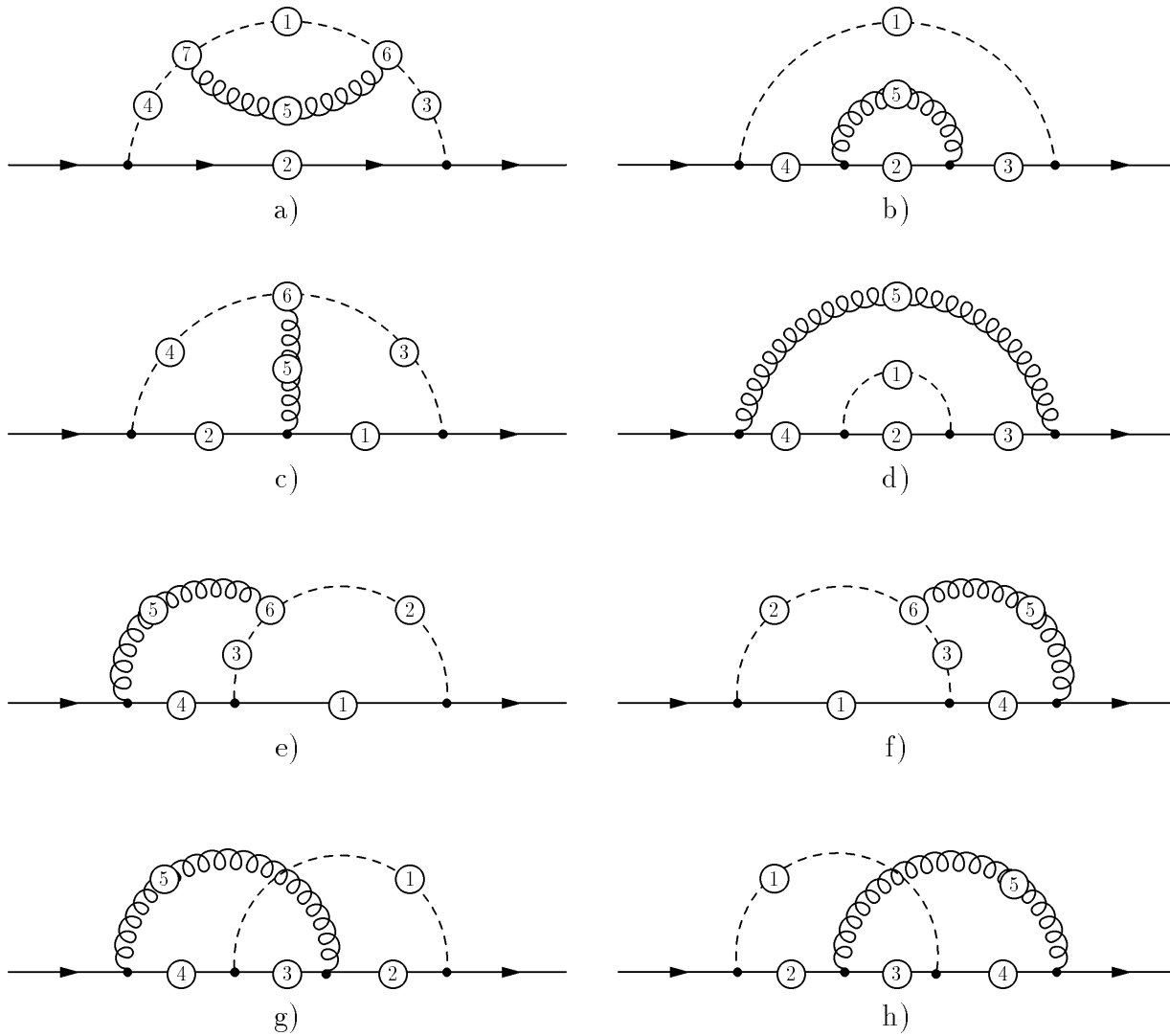


Abbildung 23: Im Bild sind die Diagramme für den Fermion-Skalar-Sektor für die Zerfälle $b \rightarrow s \gamma$ und $b \rightarrow s g$ in einem generischen Modell gezeigt. Die kleinen Kreise deuten die Ankopplung eines Gluons bzw. eines Photons (außer Kreise mit der Nummer 5) an. Die durchgezogene Linie repräsentiert ein Fermion, die gestrichelte Linie ein skalares Teilchen. Das interne Gluon ist durch eine Schlangenlinie dargestellt. Die entsprechenden Diagramme für den Fermion-Vektor-Boson-Sektor erhält man durch den Austausch des skalaren Teilchens mit einem Vektor-Boson. Dadurch entstehende Diagramme mit Gluon-Vektor-Boson-Kopplung werden weggelassen.

G.3 Funktionen für die generischen Gleichungen

$$f_1 = \frac{x+2}{8(1-x)^2} \ln x + \frac{3}{8(1-x)} \quad , \quad (601)$$

$$f_2 = \frac{x^3+3x-2}{6(1-x)^4} \ln x + \frac{2x^2+11x-7}{18(1-x)^3} \quad , \quad (602)$$

$$g_1 = \frac{-x}{2(1-x)^4} \ln x + \frac{x^2-5x-2}{12(1-x)^3} \quad , \quad (603)$$

$$g_2 = \frac{1}{(1-x)^3} \ln x + \frac{-x+3}{2(1-x)^2} \quad , \quad (604)$$

$$\begin{aligned} h_1 = & \frac{2x-3}{3(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{6x^3+63x^2+49x-6}{12(1-x)^5} \ln^2 x \\ & + \frac{-13x^4-65x^3-369x^2-191x+62}{36(1-x)^5} \ln x + \frac{-20x^3+59x^2-242x+11}{12(1-x)^4} \quad , \end{aligned} \quad (605)$$

$$\begin{aligned} h_2 = & \frac{-x+3}{3(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{-6x^3+9x^2-41x+6}{12(1-x)^5} \ln^2 x \\ & + \frac{11x^4-32x^3+222x^2+82x-31}{18(1-x)^5} \ln x + \frac{2x^3+11x^2+172x-17}{12(1-x)^4} \quad , \end{aligned} \quad (606)$$

$$\begin{aligned} h_3 = & \frac{4x^3+4x^2+112x+12}{9(1-x)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{-6x^3-39x^2+71x+6}{9(1-x)^5} \ln^2 x \\ & + \frac{11x^3-150x^2-39x+62}{27(1-x)^4} \ln x + \frac{-5x^2+76x+481}{81(1-x)^3} \quad , \end{aligned} \quad (607)$$

$$\begin{aligned} h_4 = & \frac{-5x}{6(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{51x^3+60x^2+x}{12(1-x)^5} \ln^2 x \\ & + \frac{-11x^4-163x^3-153x^2+35x+4}{18(1-x)^5} \ln x + \frac{19x^3-163x^2-59x+11}{12(1-x)^4} \quad , \end{aligned} \quad (608)$$

$$\begin{aligned} h_5 = & \frac{7x}{6(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{-3x^3-30x^2+x}{12(1-x)^5} \ln^2 x \\ & + \frac{2x^4+112x^3+177x^2-35x-4}{18(1-x)^5} \ln x + \frac{-4x^3+161x^2+16x-5}{12(1-x)^4} \quad , \end{aligned} \quad (609)$$

$$h_6 = \frac{-14x^3+112x^2+34x}{9(1-x)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{-39x^3+48x^2+23x}{9(1-x)^5} \ln^2 x$$

$$+ \frac{-34x^3 - 168x^2 + 78x + 8}{27(1-x)^4} \ln x + \frac{-113x^2 + 643x + 22}{81(1-x)^3} , \quad (610)$$

$$\begin{aligned} h_7 = & \frac{4x - 10}{3(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{-6x^2 - 51x - 28}{6(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{6x^3 - 8x^2 + 77x - 3}{3(1-x)^4} \ln x + \frac{-x^2 + 3x + 142}{6(1-x)^3} , \end{aligned} \quad (611)$$

$$\begin{aligned} h_8 = & \frac{-2x + 8}{3(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{6x^2 - 3x + 20}{6(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{-6x^3 + 19x^2 - 85x + 9}{3(1-x)^4} \ln x + \frac{23x^2 - 90x - 59}{6(1-x)^3} , \end{aligned} \quad (612)$$

$$\begin{aligned} h_9 = & \frac{-8x^2 - 8x - 176}{9(1-x)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{12x^2 + 54x - 112}{9(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{-24x^2 + 124x - 24}{9(1-x)^3} \ln x + \frac{34x - 104}{9(1-x)^2} , \end{aligned} \quad (613)$$

$$\begin{aligned} h_{10} = & \frac{-5x - 1}{3(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{-39x^2 - 39x - 7}{6(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{3x^3 + 40x^2 + 38x - 9}{3(1-x)^4} \ln x + \frac{-25x^2 + 147x + 22}{6(1-x)^3} , \end{aligned} \quad (614)$$

$$\begin{aligned} h_{11} = & \frac{7x - 1}{3(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{9x^2 + 9x + 5}{6(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{-3x^3 - 29x^2 - 40x + 9}{3(1-x)^4} \ln x + \frac{5x^2 - 138x + 7}{6(1-x)^3} , \end{aligned} \quad (615)$$

$$\begin{aligned} h_{12} = & \frac{28x^2 - 176x - 44}{9(1-x)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{54x^2 - 66x - 34}{9(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{12x^2 + 100x - 36}{9(1-x)^3} \ln x + \frac{22x - 92}{9(1-x)^2} , \end{aligned} \quad (616)$$

$$\begin{aligned} h_{13} = & \frac{9x - 6}{16(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{45x^2 + 42x - 6}{32(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{-3x^3 - 90x^2 - 69x + 18}{32(1-x)^4} \ln x + \frac{39x^2 - 183x}{32(1-x)^3} , \end{aligned} \quad (617)$$

$$h_{14} = \frac{9x - 6}{16(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{-3x^2 + 36x - 6}{32(1-x)^4} \ln^2 x$$

$$+ \frac{3x^3 - 45x^2 - 30x + 9}{16(1-x)^4} \ln x + \frac{3x^2 - 72x + 6}{16(1-x)^3} , \quad (618)$$

$$\begin{aligned} h_{15} = & \frac{-9x + 6}{8(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{-21x^2 - 39x + 6}{16(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{-3x^3 + 180x^2 + 129x - 36}{32(1-x)^4} \ln x + \frac{-45x^2 + 327x - 12}{32(1-x)^3} , \end{aligned} \quad (619)$$

$$\begin{aligned} h_{16} = & \frac{-172x^2 + 211x - 27}{96(1-x)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{531x^3 + 639x^2 + 649x - 27}{192(1-x)^5} \ln^2 x \\ & - \frac{185x^4 + 1996x^3 + 1755x^2 + 898x - 226}{288(1-x)^5} \ln x - \frac{509x^3 - 65x^2 + 2699x - 71}{192(1-x)^4} , \end{aligned} \quad (620)$$

$$\begin{aligned} h_{17} = & \frac{140x^2 - 179x + 27}{96(1-x)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{-147x^3 + 177x^2 - 569x + 27}{192(1-x)^5} \ln^2 x \\ & + \frac{149x^4 + 1072x^3 + 2247x^2 + 790x - 226}{288(1-x)^5} \ln x + \frac{485x^3 + 479x^2 + 1795x - 71}{192(1-x)^4} , \end{aligned} \quad (621)$$

$$\begin{aligned} h_{18} = & \frac{68x^3 + 167x^2 + 314x + 75}{72(1-x)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{-171x^3 + 153x^2 + 455x + 75}{144(1-x)^5} \ln^2 x \\ & + \frac{-65x^3 - 381x^2 + 318x + 10}{216(1-x)^4} \ln x + \frac{1513x^2 + 2782x + 1621}{1296(1-x)^3} , \end{aligned} \quad (622)$$

$$h_{19} = \frac{-9}{8(1-x)} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) - \frac{33x + 21}{16(1-x)^3} \ln^2 x - \frac{3x^2 - 45x - 6}{8(1-x)^3} \ln x - \frac{3x - 15}{2(1-x)^2} , \quad (623)$$

$$h_{20} = \frac{-9}{8(1-x)} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{-3x - 15}{16(1-x)^3} \ln^2 x + \frac{-3x^2 + 45x}{8(1-x)^3} \ln x + \frac{9x + 33}{8(1-x)^2} , \quad (624)$$

$$h_{21} = \frac{9}{4(1-x)} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{9x + 9}{4(1-x)^3} \ln^2 x + \frac{3x^2 - 45x - 3}{4(1-x)^3} \ln x + \frac{3x - 93}{8(1-x)^2} , \quad (625)$$

$$\begin{aligned} h_{22} = & \frac{59x - 68}{24(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{-39x^2 - 84x - 47}{12(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{63x^3 + 379x^2 + 701x + 9}{48(1-x)^4} \ln x + \frac{71x^2 + 54x + 451}{24(1-x)^3} , \end{aligned} \quad (626)$$

$$h_{23} = \frac{-43x + 52}{24(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{9x^2 + 37}{12(1-x)^4} \ln^2 x$$

$$+ \frac{-63x^3 - 203x^2 - 781x + 39}{48(1-x)^4} \ln x + \frac{-67x^2 - 210x - 227}{24(1-x)^3} , \quad (627)$$

$$\begin{aligned} h_{24} = & \frac{-7x^2 - 49x - 112}{18(1-x)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{6x^2 - 6x - 46}{9(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{3x^2 + 70x - 39}{36(1-x)^3} \ln x + \frac{-23x - 95}{36(1-x)^2} , \end{aligned} \quad (628)$$

$$j_1 = \frac{-2x^2 + x}{(1-x)^4} \ln x + \frac{-5x^2 - 5x + 4}{6(1-x)^3} , \quad (629)$$

$$j_2 = \frac{-x^2}{(1-x)^4} \ln x + \frac{-2x^2 - 5x + 1}{6(1-x)^3} , \quad (630)$$

$$j_3 = \frac{x^2}{(1-x)^3} \ln x + \frac{3x - 1}{2(1-x)^2} , \quad (631)$$

$$j_4 = \frac{-4x}{(1-x)^3} \ln x + \frac{-2x - 2}{(1-x)^2} , \quad (632)$$

$$j_5 = \frac{2x}{(1-x)^2} \ln x + \frac{2}{(1-x)} , \quad (633)$$

$$\begin{aligned} k_1 = & \frac{24x^3 + 144x^2 - 80x}{3(1-x)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{32x^3 + 120x^2 - 56x}{3(1-x)^5} \ln^2 x \\ & + \frac{60x^4 - 1740x^3 - 84x^2 + 796x - 184}{27(1-x)^5} \ln x - \frac{1538x^3 + 5652x^2 - 4806x + 1072}{81(1-x)^4} , \end{aligned} \quad (634)$$

$$\begin{aligned} k_2 = & \frac{32x^3 + 72x^2 - 16x}{3(1-x)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{112x^2 - 16x}{3(1-x)^5} \ln^2 x \\ & + \frac{96x^4 - 1272x^3 - 48x^2 + 40x + 32}{27(1-x)^5} \ln x + \frac{-2024x^3 - 954x^2 - 540x + 62}{81(1-x)^4} , \end{aligned} \quad (635)$$

$$\begin{aligned} k_3 = & \frac{-56x^2}{3(1-x)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{-8x^3 - 64x^2}{3(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{48x^3 + 80x^2 - 32x}{3(1-x)^4} \ln x + \frac{110x^2 - 12x - 2}{3(1-x)^3} , \end{aligned} \quad (636)$$

$$k_4 = \frac{64x^2 + 192x}{3(1-x)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{64x^2 + 224x}{3(1-x)^4} \ln^2 x$$

$$+ \frac{16x^3 - 368x^2 - 64x + 32}{3(1-x)^4} \ln x + \frac{-136x^2 - 256x + 8}{3(1-x)^3} , \quad (637)$$

$$\begin{aligned} k_5 = & \frac{64x^2 + 192x}{3(1-x)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{64x^2 + 224x}{3(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{16x^3 - 400x^2}{3(1-x)^4} \ln x + \frac{-56x^2 - 64x - 8}{(1-x)^3} , \end{aligned} \quad (638)$$

$$\begin{aligned} k_6 = & \frac{-64x}{3(1-x)^2} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{-16x^2 - 80x}{3(1-x)^3} \ln^2 x \\ & + \frac{88x^2 + 40x}{3(1-x)^3} \ln x + \frac{120x + 8}{3(1-x)^2} , \end{aligned} \quad (639)$$

$$\begin{aligned} k_7 = & \frac{15x^3 + 72x^2 - 35x}{3(1-x)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{68x^3 + 66x^2 - 38x}{3(1-x)^5} \ln^2 x \\ & - \frac{150x^4 + 3534x^3 - 561x^2 - 971x + 152}{54(1-x)^5} \ln x - \frac{3857x^3 + 21960x^2 - 12501x + 508}{324(1-x)^4} , \end{aligned} \quad (640)$$

$$\begin{aligned} k_8 = & \frac{64x^2 + 48x}{3(1-x)^3} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{136x^2 + 152x}{3(1-x)^4} \ln^2 x \\ & + \frac{-20x^3 - 404x^2 + 26x + 14}{3(1-x)^4} \ln x + \frac{-127x^2 - 220x - 37}{3(1-x)^3} . \end{aligned} \quad (641)$$

G.4 Nicht-gluonische Beiträge im MSSM

In diesem Teil des Anhangs werden für die numerische Auswertung wichtige nicht-gluonische Beiträge vom quartischen Squark-Vertex zusammengefaßt, welche proportional der starken Kopplungskonstanten sind. Die vier Diagramme sind in Abbildung 24 dargestellt.

$$\begin{aligned} \delta_q^{\tilde{\chi}^-} C_7^{(1)}(\mu_0) = & \frac{1}{g_2^2 K_{ts}^* K_{tb}} \sum_{A,B,C=1}^6 \sum_{I=1}^2 \frac{M_W^2}{m_{\tilde{\chi}_I^-}^4} P_{AB}^U m_{\tilde{u}_B}^2 P_{BC}^U \left(\ln \frac{m_{\tilde{u}_B}^2}{\mu_0^2} - 1 \right) \times \\ & \times \left\{ \left(X_I^{UL} \right)_{A2}^* \left(X_I^{UL} \right)_{C3} \left[-q_1(z_{AI}, z_{CI}) + \frac{2}{3} q_2(z_{AI}, z_{CI}) \right] \right. \\ & \left. + \frac{m_{\tilde{\chi}_I^-}}{m_b} \left(X_I^{UL} \right)_{A2}^* \left(X_I^{UR} \right)_{C3} \left[-q_3(z_{AI}, z_{CI}) + \frac{2}{3} q_4(z_{AI}, z_{CI}) \right] \right\} , \end{aligned} \quad (642)$$

$$\delta_q^{\tilde{\chi}^-} C_8^{(1)}(\mu_0) = \frac{1}{g_2^2 K_{ts}^* K_{tb}} \sum_{A,B,C=1}^6 \sum_{I=1}^2 \frac{M_W^2}{m_{\tilde{\chi}_I^-}^4} P_{AB}^U m_{\tilde{u}_B}^2 P_{BC}^U \left(\ln \frac{m_{\tilde{u}_B}^2}{\mu_0^2} - 1 \right) \times$$

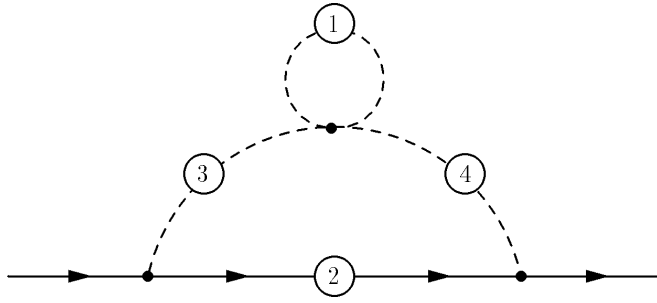


Abbildung 24: Diagramme mit einem 4-Squark-Vertex. Die durchgezogene Linie stellt ein Fermion dar (Chargino, Neutralino, Gluino) und die gestrichelte Linie repräsentiert ein up-Squark bzw. ein down-Squark. Die Kreise mit den Zahlen indizieren Punkte, von denen ein Gluon bzw. ein Photon emittiert werden kann. Das Diagramm, bei dem das Photon bzw. Gluon von dem Kreis mit der Nummer 1 wegfliet, verschwindet.

$$\times \left\{ \left(X_I^{UL} \right)_{A2}^* \left(X_I^{UL} \right)_{C3} q_2(z_{AI}, z_{CI}) + \frac{m_{\tilde{\chi}_I^-}}{m_b} \left(X_I^{UL} \right)_{A2}^* \left(X_I^{UR} \right)_{C3} q_4(z_{AI}, z_{CI}) \right\}, \quad (643)$$

$$\begin{aligned} -3\delta_q^{\tilde{\chi}_0} C_7^{(1)}(\mu_0) &= \delta_q^{\tilde{\chi}_0} C_8^{(1)}(\mu_0) = \frac{1}{g_2^2 K_{ts}^* K_{tb}} \sum_{A,B,C=1}^6 \sum_{I=1}^4 \frac{M_W^2}{m_{\tilde{\chi}_I^0}^4} P_{AB}^D m_{\tilde{d}_B}^2 P_{BC}^D \left(\ln \frac{m_{\tilde{d}_B}^2}{\mu_0^2} - 1 \right) \times \\ &\times \left\{ \left(Z_I^{DL} \right)_{A2}^* \left(Z_I^{DL} \right)_{C3} q_2(w_{AI}, w_{CI}) + \frac{m_{\tilde{\chi}_I^0}}{m_b} \left(Z_I^{DL} \right)_{A2}^* \left(Z_I^{DR} \right)_{C3} q_4(w_{AI}, w_{CI}) \right\}, \end{aligned} \quad (644)$$

$$\begin{aligned} \delta_q^{\tilde{g}} C_7^{(1)}(\mu_0) &= -\frac{8g_3^2}{9g_2^2 K_{ts}^* K_{tb}} \frac{M_W^2}{m_{\tilde{g}}^4} \sum_{A,B,C=1}^6 P_{AB}^D m_{\tilde{d}_B}^2 P_{BC}^D \left(\ln \frac{m_{\tilde{d}_B}^2}{\mu_0^2} - 1 \right) \times \\ &\times \left\{ \left(\Gamma^{DL} \right)_{A2}^* \left(\Gamma^{DL} \right)_{C3} q_2(v_A, v_C) - \frac{m_{\tilde{g}}}{m_b} \left(\Gamma^{DL} \right)_{A2}^* \left(\Gamma^{DR} \right)_{C3} q_4(v_A, v_C) \right\}, \end{aligned} \quad (645)$$

$$\begin{aligned} \delta_q^{\tilde{g}} C_8^{(1)}(\mu_0) &= \frac{3g_3^2}{g_2^2 K_{ts}^* K_{tb}} \frac{M_W^2}{m_{\tilde{g}}^4} \sum_{A,B,C=1}^6 P_{AB}^D m_{\tilde{d}_B}^2 P_{BC}^D \left(\ln \frac{m_{\tilde{d}_B}^2}{\mu_0^2} - 1 \right) \times \\ &\times \left\{ \left(\Gamma^{DL} \right)_{A2}^* \left(\Gamma^{DL} \right)_{C3} \left[q_1(v_A, v_C) - \frac{1}{9} q_2(v_A, v_C) \right] \right. \\ &\left. - \frac{m_{\tilde{g}}}{m_b} \left(\Gamma^{DL} \right)_{A2}^* \left(\Gamma^{DR} \right)_{C3} \left[q_3(v_A, v_C) - \frac{1}{9} q_4(v_A, v_C) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (646)$$

wobei $P^U = \Gamma^{UL} \Gamma^{UL\dagger} - \Gamma^{UR} \Gamma^{UR\dagger}$ und $P^D = \Gamma^{DL} \Gamma^{DL\dagger} - \Gamma^{DR} \Gamma^{DR\dagger}$. Die Massenverhältnisse werden wie bisher bezeichnet: $z_{AI} = m_{\tilde{u}_A}^2 / m_{\tilde{\chi}_I^-}^2$, $w_{AI} = m_{\tilde{d}_A}^2 / m_{\tilde{\chi}_I^0}^2$ und $v_A = m_{\tilde{d}_A}^2 / m_{\tilde{g}}^2$.

Die expliziten Ausdrücke der Funktionen $q_i(x, y)$ lauten:

$$\begin{aligned}
q_1(x, y) &= \frac{2}{3(x-y)} \left[\frac{x^2 \ln x}{(1-x)^4} - \frac{y^2 \ln y}{(1-y)^4} \right] \\
&\quad + \frac{2x^2y^2 + 5x^2y + 5xy^2 - x^2 - y^2 - 22xy + 5x + 5y + 2}{9(1-x)^3(1-y)^3} ,
\end{aligned} \tag{647}$$

$$\begin{aligned}
q_2(x, y) &= \frac{2}{3(x-y)} \left[\frac{x \ln x}{(1-x)^4} - \frac{y \ln y}{(1-y)^4} \right] \\
&\quad + \frac{-x^2y^2 + 5x^2y + 5xy^2 + 2x^2 + 2y^2 - 10xy - 7x - 7y + 11}{9(1-x)^3(1-y)^3} ,
\end{aligned} \tag{648}$$

$$q_3(x, y) = \frac{4}{3(x-y)} \left[\frac{x^2 \ln x}{(1-x)^3} - \frac{y^2 \ln y}{(1-y)^3} \right] + \frac{-6xy + 2x + 2y + 2}{3(1-x)^2(1-y)^2} , \tag{649}$$

$$q_4(x, y) = \frac{4}{3(x-y)} \left[\frac{x \ln x}{(1-x)^3} - \frac{y \ln y}{(1-y)^3} \right] + \frac{-2xy - 2x - 2y + 6}{3(1-x)^2(1-y)^2} . \tag{650}$$

H Numerischer Input

Für die numerische Auswertung der Wilson-Koeffizienten und der Verzweigungsverhältnisse bzw. Massenaufspaltungen werden die folgenden Zahlenwerte verwendet:

1) **Massen**²¹

$$\begin{aligned}
 m_W &= 80.41 \text{ GeV} \quad , \\
 m_Z &= 91.187 \text{ GeV} \quad , \\
 m_s &= \frac{m_b}{50} \quad , \\
 m_b &= 4.8 \text{ GeV} \quad , \\
 m_t &= 175 \text{ GeV} \quad , \\
 m_B &= 5279.2 \pm 1.8 \text{ MeV} \quad , \\
 \Delta m_B &= 0.464 \pm 0.018 \cdot 10^{12} \hbar s^{-1} \approx 3.0541 \cdot 10^{-10} \text{ MeV} \quad , \\
 m_{\text{Higgs}} &\geq 100 \text{ GeV} \quad , \\
 m_{\text{SUSY}} &\geq 100 \text{ GeV} \quad ,
 \end{aligned}$$

2) **CKM-Matrix**

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 0.22 \quad , \\
 \rho &= 0 \\
 \eta &= 0.3 \quad , \\
 A &= 0.83 \\
 V_{ub} &= A \lambda^3 (\rho - i \eta) = -i 0.0026 \quad , \\
 V_{us} &= \lambda = 0.22 \quad , \\
 V_{cb} &= A \lambda^2 = 0.0401 \quad , \\
 V_{cs} &= 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{1}{8} \lambda^4 (1 + 4 A^2) = 0.9747 \quad , \\
 V_{tb} &= 1 - \frac{1}{2} A^2 \lambda^4 = 0.9992 \quad , \\
 V_{ts} &= -A \lambda^2 + \frac{1}{2} A (1 - 2 \rho) \lambda^4 + i \eta A \lambda^4 = 0.00057 + i 0.000583 \quad .
 \end{aligned}$$

Die aktuellen Meßwerte unter Berücksichtigung der Unitarität lauten [26]:

$$\mathbf{V}_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 0.9745 \text{ bis } 0.9760 & 0.217 \text{ bis } 0.224 & 0.0018 \text{ bis } 0.0045 \\ 0.217 \text{ bis } 0.224 & 0.9737 \text{ bis } 0.9753 & 0.036 \text{ bis } 0.042 \\ 0.004 \text{ bis } 0.013 & 0.035 \text{ bis } 0.042 & 0.9991 \text{ bis } 0.9994 \end{pmatrix} \quad .$$

²¹Alle Massen sind Pol-Massen.

3) Kopplungskonstanten und nichtstörungstheoretische Parameter

$$\begin{aligned}
G_F &= 1.16639(1) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad , \\
\sin \Omega_W &= 0.23124(24) \quad , \\
g_W &= 0.66 \quad , \\
\alpha_S(\mu_b) &= 0.212 \quad \text{für : } \mu_b = 5 \text{ GeV} \quad , \\
\alpha_S(m_W) &= 0.12 \quad , \\
\alpha_S(m_Z) &= 0.118 \quad , \\
\alpha_{\text{em}}^{\text{on shell}} &= 1/137.036 \quad , \\
B_B &= 1.31(3) \quad , \\
f_B &= 175(25) \text{ MeV} \quad , \\
\lambda_2 &= 0.12 \text{ GeV}^2 \quad .
\end{aligned}$$

Das Verzweigungsverhältnis des semileptonischen Zerfalls $b \rightarrow X_c e \bar{\nu}_e$ beträgt 0.104.

Die Werte für 2HDM- bzw. MSSM-Parameter werden in den entsprechenden Kapiteln festgelegt.

Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr. Gerhard Soff bedanken, für die Ermöglichung innerhalb seiner Arbeitsgruppe auf dem interessanten Gebiet der B -Mesonen-Physik zu arbeiten und für sein Interesse.

Insbesondere möchte ich mich bei meinen Freunden und Kollegen Dr. Mikolaj Misiak und Dipl. Phys. Christoph Bobeth für die fruchtbare Zusammenarbeit bedanken. Ich habe von den vielen Diskussionen sehr profitiert.

Weiterhin bin ich den Herren Prof. Dr. Andrzej Buras, Prof. Dr. Fred Jegerlehner, Dr. Frank Krauss, Dr. Tord Riemann, Prof. Dr. Klaus Schubert, Dipl. Phys. Ralf Schützhold, Prof. Dr. Bernard Spaan und Dr. Roland Waldi, sowie der gesamten Arbeitsgruppe „Hardronen und Kerne“ zu Dank verpflichtet.

Meiner Freundin Silke, meinem Vater Winfried und meinem Onkel Winfried Gurland sei für die Geduld und Unterstützung aufs herzlichste gedankt.

Literatur

- [1] The BABAR-Collaboration; *Technical Design Report for the BABAR Detector* (1995).
- [2] The Belle Collaboration; *Letter of Intent for a Study of CP Violation in B Meson Decays*, KEK report No. **94-2** (1994).
- [3] P. Bagnaia, F. Di Lodovico, J.-P. Ernenwein, R. Faccini, M. Felcini, J.-P. Martin; *Higgs discovery regions for the L3 experiment at LEP2*, L3 Note 1769 - Contribution to the LEP2 workshop; May, 95,
Search for Supersymmetric Particles at $130 \text{ GeV} < \sqrt{s} < 136 \text{ GeV}$ at LEP, L3 Collaboration. Feb, 96.
- [4] The LHC Study Group; *The LHC Conceptual Design Report - The Yellow Book*, CERN/AC/95-05(LHC).
- [5] K. G. Wilson; Phys. Rev. 179 (1969) 1499.
W. Zimmermann, Ann. Phys. 77 (1973) 536 und 570.
- [6] J. Collins; *Renormalization*, Cambridge (1984).
- [7] G. Altarelli, G. Curci, G. Martinelli, S. Petrarca; Nucl. Phys. B187 (1981) 461.
- [8] A. J. Buras, P. H. Weisz; Nucl. Phys. B333 (1990) 66.
- [9] A. J. Buras, M. Jamin, M. E. Lautenbacher; Nucl. Phys. B400 (1993) 75.
M. Ciuchini, E. Franco, L. Reina, L. Silvestrini; Nucl. Phys. B421 (1994) 41.
M. Misiak, M. Münz; Phys. Lett B344 (1995) 308.
G. Buchalla; Nucl. Phys. B391 (1993) 501.
G. Buchalla, A. J. Buras; Nucl. Phys. B400 (1993) 225.
- [10] G. Buchalla, A. J. Buras, M. E. Lautenbacher; Rev. Mod. Phys. 68 (1996) 1125.
A. J. Buras; *Weak hamiltonians, CP-violation and rare decays*, hep-ph/9806471, to appear in "Probing the Standard Model of Particle Interactions", F. David and R. Gupta, eds, 1998 Elsevier Science B.V..
- [11] S. Glenn et al. (CLEO Collaboration); preprint CLEO-CONF 98-17, ICHEP98 1011.
J. Alexander, Plenary talk given at the ICHEP98 Conference, Vancouver, July 1998.
- [12] R. Barate et al. (ALEPH Collaboration); Phys. Lett. B429 (1998) 169.
- [13] K. Adel, Y.-P. Yao; Phys. Rev. D49 (1994) 4945.
- [14] A. Ali, C. Greub; Z. Phys. C49 (1991) 431.
A. Ali, C. Greub; Phys. Lett. B259 (1991) 182.
N. Pott; Phys. Rev. D54 (1996) 938.
A. J. Buras, A. Kwiatkowski, N. Pott; Phys. Lett. B414 (1997) 157.

- [15] K. Chetyrkin, M. Misiak, M. Münz; Phys. Lett. B400 (1997) 206.
- [16] C. Greub, T. Hurth; Phys. Rev. D56 (1997) 2934.
- [17] C. Greub, T. Hurth, D. Wyler; Phys. Lett. B380 (1996) 385.
C. Greub, T. Hurth, D. Wyler; Phys. Rev. D54 (1996) 3350.
- [18] A. Czarnecki, W. J. Marciano; Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 277.
- [19] A. L. Kagan, M. Neubert; Eur. Phys. J. C7 (1999) 5.
M. Neubert; *Theoretical Status of $B \rightarrow X_s \gamma$ Decays*, hep-ph/9809377.
- [20] C. Greub, T. Hurth; *Radiative corrections in inclusive rare B decays*, hep-ph/9809468.
- [21] G. 't.Hooft; Nucl. Phys. B33 (1971) 173.
G. 't.Hooft; Nucl. Phys. B35 (1971) 167.
- [22] L. H. Ryder; *Quantum Field Theory*, Cambridge (1996).
- [23] C. Itzykson, J.-B. Zuber; *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980).
- [24] The Super-Kamiokande Collaboration, Y. Fukuda et al.; Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 1562.
- [25] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li; *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford Clarendon Press (1984).
- [26] *Particle Data Book*, Eur. Phys. J. C3 (1998) 1.
- [27] L. Wolfenstein; Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 1945.
- [28] M. Schmidtler, K. R. Schubert; Z. Phys. C53 (1992) 347.
- [29] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, R. Turlay; Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 138.
- [30] The BABAR Collaboration (P. F. Harrison and H. Quinn, eds.); *The BABAR Physics Book: PHYSICS AT AN ASYMMETRIC B FACTORY*, SLAC-R-504 (1998).
- [31] S. Gasiorowicz; *Elementary Particle Physics*, Wiley, New York (1966).
- [32] F. W. Busser et al.; Phys. Lett. 46B (1973) 471.
- [33] O. W. Greenberg; Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 598.
D. B. Lichtenberg; *Unitary Symmetry and Elementary Particles*, Academic Press, New York (1970).
- [34] F. Halzen, A. D. Martin; *Quarks and Leptons* Wiley, New York (1984).
- [35] G. Hanson et al.; Phys. Rev. Lett. 35 (1975) 1609.
G. Hanson et al.; Phys. Rev. D26 (1982) 991.

- [36] D. P. Barber et al.; Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 830.
C. Berger et al.(PLUTO-Collaboration); Phys. Lett. 86B (1979) 418.
- [37] J. F. Gunion, H. E. Haber, G. Kane, S. Dawson; *The Higgs Hunter's Guide*, Addison-Wesley, Redwood City (1990).
- [38] P. Langacker, S. U. Sankar; Phys. Rev. D40 (1989) 1569.
- [39] P. Cho, M. Misiak; Phys. Rev. D49 (1994) 5894.
- [40] G. Beall, M. Bander, A. Soni; Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 848.
- [41] S. P. Martin; *A supersymmetry primer*, hep-ph/9709356.
- [42] H. E. Haber, G. L. Kane; Phys. Rept. 117 (1985) 75.
M. F. Sohnius; Phys. Rept. 128 (1985) 39.
- [43] R. Haag, J. T. Lopuszanski, M. Sohnius; Nucl. Phys. B88 (1975) 257.
- [44] S. Coleman, J. Mandula; Phys. Rev. 159 (1967) 1251.
- [45] H. E. Haber, M. Schmitt; Eur. Phys. J. C3 (1998) 743.
- [46] H. Kalka, G. Soff; *Supersymmetrie*, Teubner, Stuttgart (1997).
- [47] M. Misiak, S. Pokorski, J. Rosiek; To appear in the Review Volume "Heavy Flavors II", eds. A. J. Buras and M. Lindner, World Scientific, Singapore; hep-ph/9703442.
- [48] P. Cho, M. Misiak, D. Wyler; Phys. Rev. D54 (1996) 3329.
- [49] J. L. Lopez; Rept. Prog. Phys. 59 (1996) 819.
- [50] S. Pokorski; *Gauge Field Theories*, Cambridge (1987).
- [51] P. Ramond; *Field Theory, A Modern Primer*, Addison-Wesley, Reading (1981).
- [52] W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke, T. Muta; Phys. Rev. D18 (1978) 3998.
- [53] P. Breitenlohner, D. Maison; Commun. Math. Phys. 52 (1977) 11.
G. Bonneau; Phys. Lett. 96B (1980) 147.
- [54] W. Siegel; Phys. Lett. 84B (1979) 193.
- [55] D. Maison; Phys. Lett. 150B (1985) 139.
- [56] G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B44 (1972) 189.
D. A. Akyeampong, R. Delbourgo, Nuovo Cim. 17A (1973) 578.
- [57] L. F. Abbott, Nucl. Phys. B185 (1981) 189.

- [58] R. D. Field; *Applications of Perturbative QCD*, Frontiers in Physics 77, Redwood City (1989).
- [59] A. J. Buras, M. Jamin, P. H. Weisz; Nucl. Phys. B347 (1990) 491.
- [60] J. Urban, F. Krauss, U. Jentschura, G. Soff; Nucl. Phys. B523 (1998) 40.
- [61] M. Misiak, J. Urban; Phys. Lett. B451 (1999) 161.
- [62] D. J. Griffiths; *Introduction to Elementary Particles*, Wiley, New York (1987).
- [63] T. Inami, C. S. Lim; Prog. Theor. Phys. 65 (1981) 297.
W. Killian, T. Mannel; Phys. Lett. 301B (1993) 382.
C. Q. Geng, John N. Ng; Phys. Rev. D38 (1988) 2857.
S. L. Glashow, E. E. Jenkins; Phys. Lett. 196B (1987) 233.
- [64] F. J. Gilman, M. B. Wise; Phys. Lett. 93B (1980) 129.
- [65] S. Herrlich, U. Nierste; Phys. Rev. D52 (1995) 6505.
- [66] J. Küblbeck, M. Böhm, A. Denner; Comput. Phys. Commun. 60 (1990) 165.
- [67] S. Wolfram; *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley, Reading (1993).
- [68] A. Heck; *Introduction to Maple*, Springer, New York (1993).
- [69] G. Altarelli, G. Curci, G. Martinelli, R. Petrarca; Phys. Lett. B99 (1981) 141.
- [70] G. Buchalla, A. J. Buras; Nucl. Phys. B398 (1993) 285.
G. Buchalla, A. J. Buras; Nucl. Phys. B400 (1993) 225.
G. Buchalla, A. J. Buras; *The Rare Decays $K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$, $B \rightarrow X \nu \bar{\nu}$ and $B \rightarrow l^+ l^- - A_n$ Update*, hep-ph/9901288.
- [71] K. Chetyrkin, M. Misiak, M. Münz; Nucl. Phys. B518 (1998) 473.
- [72] A. J. Buras, TUM-HEP-259/96, hep-ph/9610461.
- [73] M. H. Schune, *talk presented at the 7th International Symposium on Heavy Flavor Physics*, Santa Barbara, July 1997.
- [74] A. J. Buras, *talk presented at the 7th International Symposium on Heavy Flavor Physics*, Santa Barbara, July 1997.
- [75] M. Misiak; private Mitteilung.
- [76] J.-M. Gerard, W. Grimus, A. Raychaudhuri, G. Zoupanos; Phys. Lett. 140B (1984) 349.
- [77] C. Bobeth, M. Misiak, J. Urban; hep-ph/9904413.

- [78] C. Bobeth, M. Misiak, J. Urban, preprint TUM-HEP-329/98, in preparation.
- [79] A. J. Buras, A. Kwiatkowski, N. Pott; Nucl. Phys. B517 (1998) 353.
- [80] P. Ciafaloni, A. Romanino, A. Strumia; Nucl. Phys. B524 (1998) 361.
- [81] F. M. Borzumati, C. Greub; Phys. Rev. D58 (1998) 074004.
M. Ciuchini, G. Degrassi, P. Gambino, G. F. Guidice; Nucl. Phys. B527 (1998) 21.
- [82] V. A. Smirnov; *Renormalization and Asymptotic Expansions*, Birkhäuser, Basel (1991).
V. A. Smirnov; Mod. Phys. Lett. A10 (1995) 1485.
- [83] A. Strumia, Nucl. Phys. B532 (1998) 28.
- [84] M. Misiak; Nucl. Phys. B393 (1993) 23.
A. J. Buras, M. Münz; Phys. Rev. D52 (1995) 186.
- [85] K. Fujikawa, A. Yamada; Phys. Rev. D49 (1994) 5890.
- [86] A. J. Buras, M. Misiak, M. Münz, S. Pokorski; Nucl. Phys. B424 (1994) 374.
- [87] G. M. Asatryan, A. Ioannisian; Phys. Rev. D54 (1996) 5642.
- [88] R. Slansky; Phys. Rept. 79 (1981) 1.
- [89] S. Bertolini, F. Borzumati, A. Masiero, G. Ridolfi; Nucl. Phys. B353 (1991) 591.
M. Ciuchini, G. Degrassi, P. Gambino, G. F. Guidice; Nucl. Phys. B534 (1998) 3.
- [90] J. F. Donoghue, E. Golowich, B. R. Holstein; *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge (1996).
- [91] N. Cabibbo, L. Maiani; Phys. Lett. B79 (1978) 109.
- [92] T. Mannel; hep-ph/9611411.
- [93] Y. Nir; Phys. Lett. B221 (1989) 184.
- [94] A. F. Falk, M. Luke, M. J. Savage; Phys. Rev. D49 (1994) 3367.
- [95] M. Neubert; Proc. of the 17th Symposium on Lepton-Photon Interactions, Beijing, 1995,
ed. by Z. Zhi-Peng and C. He-Sheng, World Scientific 1996.
- [96] M. B. Voloshin; Phys. Lett. B397 (1997) 275.
A. Khodjamirian, R. Rückle, G. Stoll, D. Wyler; Phys. Lett. B402 (1997) 167.
Z. Ligeti, L. Randall, M. B. Wise; Phys. Lett. B402 (1997) 178.
A. K. Grant, A. G. Morgan, S. Nussinov, R. D. Peccei; Phys. Rev. D56 (1997) 3151.
G. Buchalla, G. Isidori, S. J. Rey; Nucl. Phys. B511 (1998) 594.
- [97] T. Muta; *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapore (1998).

- [98] A. Ghinculov, J.J. van der Bij; Nucl. Phys. B436 (1995) 30.
- [99] F. V. Tkachev; Phys. Lett. 100B (1981) 65.
K. G. Chetyrkin, F. V. Tkachev; Nucl. Phys. B192 (1981) 159.
- [100] A. I. Davydychev, J. B. Tausk; Nucl. Phys. B397 (1993) 123.

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

